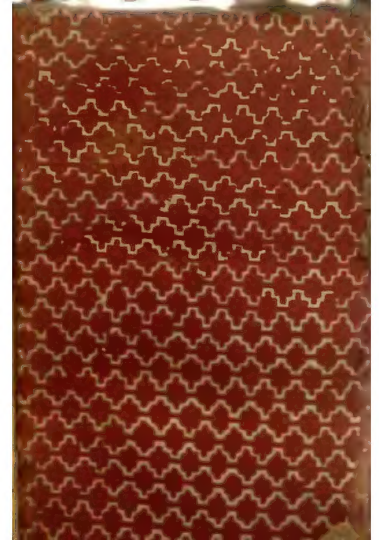


B-160518



1594-X⁵3

SCOTT
MILITARY
RECORDS







15-10-12



11 31

Star

11-11-12

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИΘΜΕΤΙΚΑ

Г. Леонгарда Ейлера.

Переведенная съ ишведскаго подлинника Ака-
демии Наукъ алыоникомъ Петромъ
Иноходцовымъ

и студентомъ Иваномъ Юднынымъ.

ТОМЪ ВТОРЫЙ,

въ которомъ предлагаются правила,
рѣшенія уравненій,
и Диофанскій образъ рѣшить вопросы.



при Императорской Академіи Наукъ 1769 года.



85011

РОСПИСЬ МАТЕРІАМЪ.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

о обѣ алгебраическиххъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.

ГЛАВА I. о рѣшеніи задачъ вообще-спран. 1

—— II. о обѣ уравненіяхъ первой степени и
ихъ рѣшеніи - - - - - 9

—— III. о рѣшеніи нѣкоторыхъ принадле-
жащихъ сюда вопросовъ - - - 17

—— IV. о разрѣшеніи двухъ или больше
уравненій первой степени - - 38

—— V. о рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ
уравненій - - - - - 59

—— VI. о рѣшеніи свѣщенныхъ квадра-
тныхъ уравненій - - - - 73

—— VII. о извлеченіи корней изъ много-
угольныхъ чиселъ - - - - 92

—— VIII. о извлеченіи квадратныхъ кор-
ней изъ биномія, или двучленного
числа - - - - - 101

—— IX. о свойствахъ квадратныхъ уравне-
ній - - - - - 118

—— X. о разрѣшеніи чистыхъ кубическихъ
уравненій - - - - - 132

ГЛАВА XI. о разрѣшеніи полныхъ кубичныхъ уравненій	- - - - -	142
— XII. о правилѣ Кардана, или Сципiona Феррея	- - - - -	164
— XIII. о разрѣшеніи уравненій четвертой степени, кои также и биквадратныя называются		177
— XIV. о Помбеліевомъ правилѣ, биквадратныя уравненія приводить въ кубичныя	- - - - -	192
— XV. о новомъ рѣшеніи биквадратныхъ уравненій	- - - - -	200
— XVI. о разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе	- - - - -	212

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

О неопредѣленномъ анализѣ

ГЛАВА I. о разрѣшеніи такихъ уравненій, въ которыхъ больше нежели одно неизвѣстное число находится.		231
— II. о правилѣ такъ называемомъ слѣпоиъ, гдѣ изъ двухъ уравненій при или больше неизвѣстныхъ чиселъ опредѣляются	- - - - -	260
		III.

- ГЛАВА III. о составныхъ неопредѣленныхъ
уравненияхъ , въ которыхъ первая
только степень неизвѣстнаго числа
находится - - - - - 272
- — — IV. о способѣ извлекому формулу
 $\sqrt{a+bx+cx}$ сдѣлать извлеко-
мою - - - - - 280
- — — V. о случаяхъ, въ которыхъ формула
 $a+bx+cx$ никогда квадратомъ быть
не можетъ - - - - - 309
- — — VI о случаяхъ въ которыхъ формула
 $axx+bx$ будетъ квадратъ въ цѣлыхъ
числахъ - - - - - 327
- — — VII. о особливомъ способѣ формулу
 $axx+bx+c$ сдѣлать квадратомъ въ цѣ-
лыхъ числахъ - - - - - 346
- — — VIII. о способѣ извлекому формулу
 $\sqrt{a+bx+cx+dx^2}$ сдѣлать рациона-
льною - - - - - 354
- — — IX. о способѣ извлекому формулу
 $\sqrt{a+bx+cx+dx^2+ex^3}$ сдѣлать извле-
комою - - - - - 380
- — — X. о способѣ формулу $\sqrt[3]{a+bx+cx+dx^2}$ сдѣлать р а ц и о н а л ь н о ю 401

ГЛАВА XI. о разрѣшеніи на множителей	
формулы $axx+bx+cy$ - - -	418
— — XII. о превращеніи формулы $axx+cy$	
въ квадраты, или въ высшія сте-	
пени - - - - -	440
— — XIII. о нѣкоторыхъ формулахъ сего	
рода ax^2+by^2 , кои въ квадратами	
сдѣлать не можно - - -	461
— — XIV. разрѣшенія нѣкоторыхъ вопро-	
совъ принадлежащихъ до сей часи	
Анадишки. - - - -	483
— — XV. о разрѣшеніи вопросовъ въ кото-	
рыхъ требуются кубы.	557

конецъ разписи.

Въ началѣ сего сочиненія, въ предисловіи, сказано, что сего сочиненія не должно читать, какъ книгу, а какъ таблицу.

погрѣшности.

страница	строка	напечатано	читай
11	3	$\pm a$	$+a$
—	4	$\pm 2a$	$+2a$
34	1	$a c - x$	$a c - x$
45	6	$2y = 18^6 x$	$2y = 18$
52	9	19^3	$19\frac{1}{2}$
58	1	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}f$

страница.	строка	напечатано	читай.
62	8	$\frac{ex+f}{gx+b}$	$\frac{ex+f}{gx+b}$
82	5	$\frac{27}{a}$	$\frac{27}{a}$
85	4	$V(\frac{1}{2}+11a)$	$V(\frac{1}{2}+110)$
89	19	$100-x$	$100-x$
92	16	V	n
93	2, 3, 4, 5, 6, 7,	V	n
107	6	$\frac{V(-c)}{2}$	$\frac{V(a-c)}{2}$
108	10	$b=\frac{1}{2}; -3$	$b=\frac{1}{2}; -3$
128	10	$fx+xxgx+b=0$	$fx+xxgx+fbx_x=0$
136	20	$xc=0$	$x-c=0$
145	3	$b=pq+pr+qr$	$b=pq+pr+qr$
152	21	q	8
155	4	124	124x
197	3	$x=5+V\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}+V\frac{1}{2}$
202	8	$g=\frac{100}{12}$	$b=\frac{100}{12}$
203	14	$Vg=\frac{1}{2}b$	$Vb=\frac{1}{2}b$
228	22	частыя	частныя
236	14	$2y=7z+x$	$2y=7z+1$
246	4	останется, б,	останется. 2.
306	12	$1681=412$	$1681=41^2$
319	21	$25mn+19n+1$	$25mn+10n+1$
342	21	поставь -g, вместо g	поставь g, вместо -g
350	15	$n=\frac{p+V(1pp-2)}{2}$	$n=\frac{p+V(1pp-2)}{2}$
352	21	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$
356	3	$q=\frac{27+V(1277-27)}{2}$	$q=\frac{27+V(1277-27)}{2}$

страница	строка	напечатано	читай.
361	16	$n = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4pp - 2}}{2}$	$n = \frac{p + \sqrt{(p+1)^2 - 4pp - 2}}{2}$
369	18	$= ff + 2fp$	$= ff + 2fp_x$
370	15	$= ff + dx^2$	$= ff + dx^2$
383	3	$x = \frac{d}{e}$	$x = \frac{d}{e}$
412	7	$\frac{1 - 2\gamma + 2\gamma\gamma + \gamma^5}{(1-\gamma)^2}$	$\frac{1 - 2\gamma + 2\gamma\gamma - \gamma\gamma^5}{(1-\gamma)^2}$
428	22	$y = 1 -$	$y = 1 -$
445	2, 3	$xx + yy = (pp + qq)^2$	$xx + yy = (fp + qq)^2$
454	3	$c = 7x - 5p - 2fpqq$	$c = 7x - 5p - 2fpqq$
—	22	когда	тогда
458	45	$(x + y \sqrt{c})$	$(x + y \sqrt{-c})$
—	16	$(x - y \sqrt{c})$	$(x - y \sqrt{-c})$
464	9	$x^2 - y^2$	$x^2 + y^2$
485	5	$x = \frac{a^2 - 2apcc + r^2}{4pcc}$	$x = \frac{a^2 - 2apcc + r^2}{4pcc}$
—	12	$x + y = \frac{100}{9}$	$x + y = \frac{100}{9}$
491	28	$xxuyy$	$xxuyy$
492	17	$y = \frac{2pq + pp - qq}{p^2 + q^2}$	$y = \frac{2pq + pp - qq}{p^2 + q^2}$
495	15	$\frac{2 - r - d}{5}$	$\frac{2 - r - d}{5}$
506	11	$\frac{1}{a} + \frac{a^2b^2r + a^2 + b(b-a)^2u}{b-a}$	$\frac{2as + \frac{a^2(b-a)u + b(b-a)^2u}{b-a}}{b-a}$
517	2	$s + r = 2f$	$s + r = 2f$
529	17	$x = pp - acc$	$x = bb - acc$
549	14	$= \frac{6r6}{9} - \frac{22}{2}$	$= \frac{6r6}{9} - \frac{22}{2}$
555	19	$-\frac{22}{6}$	$-\frac{22}{6}$



ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ, объ алгебраическихъ уравне- нiяхъ и о ихъ рѣшенiи.



ГЛАВА I.

О рѣшенiи задачъ вообще.

§63.

Главное намѣренiе алгебры, такъ какъ
и прочихъ частей математики, кло-
нится туда, чтобъ опредѣлить ве-
личину неизвѣстныхъ количествъ, что
дѣлается изъ подробнаго разсмотрѣнiя
обстоятельствъ въ вопросѣ предписан-
ныхъ,
Толѣ II. А ныхъ,

2 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

ныхъ , и означенныхъ извѣстными количествами. Чего ради алгебру опредѣлить можно и симъ образомъ , то есть , что въ ней показывается , какимъ образомъ изъ данныхъ или извѣстныхъ количествъ находить неизвѣстные.

564.

Сіе сходству сіѣ со всѣмъ тѣмъ , что по сіѣ мѣсто уже предложено было , ибо вездѣ изъ данныхъ количествъ исканы были такіе , которые прежде какъ неизвѣстные мы брали. Первой пому примѣръ дастъ сложеніе , гдѣ данныхъ двухъ или больше чиселъ находили мы сумму , то есть , такое число , которое даннымъ числамъ вмѣстѣ взятымъ равно было.

Въ вычитаніи искали мы число равное разности двухъ данныхъ чиселъ.

Самое то же примѣчается въ умноженіи , дѣленіи , въ возвышеніи до степеней и извлеченіи корней , гдѣ всегда изъ данныхъ чиселъ находится неизвѣстное.

565.

565.

Въ послѣдней часѣи разрѣшили уже мы нѣкоторые вопросы, при чемъ всегда искали такое число, которое изъ другихъ данныхъ чиселъ по нѣкоторымъ обстоятельствамъ опредѣлить должно было.

Что ради всѣ вопросы клоняются туда, чтобъ изъ данныхъ нѣкоторыхъ чиселъ находить новое, состоящее съ прежними въ нѣкоемъ союзѣ, который опредѣляется по нѣкоторымъ обстоятельствамъ или свойствамъ принадлежащимъ къ искомому числу.

566.

Во всякомъ вопросѣ искомое число означается послѣдними буквами алфавита, и смотрится на предписанныя въ немъ обстоятельства, которые даютъ уравненіе между двумя числами. Изъ такого уравненія должно попомъ опредѣлить величину искомаго числа, чрезъ что разрѣшится и самой вопросъ. Случаются иногда вопросы, гдѣ ищется

4 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

больше нежели одно число, но что равнымъ образомъ чрезъ уравненія совершается.
567.

Сие можно лучше изъяснить самимъ примѣромъ. Представь себѣ вопросъ такой :

20 человекъ мушеры и женщины вмѣстѣ ѣдятъ въ трактирѣ, мушера платилъ 8 грош., а женщина 7 грош. вся же сумма денегъ, которую они хозяину заплатили дѣлалъ 6 талеровъ; спрашивается, сколько мушеровъ, и сколько женщинъ въ томъ числѣ было ?

Для рѣшенія сего вопроса положи число мушеровъ $= x$, и поступай съ нимъ такъ какъ съ известнымъ количествомъ, то есть, какъ будто бы хотѣлъ опробовать рѣшившись заданной вопросъ, ежели число мушеровъ положится x , когда же мушеры и женщины вмѣстѣ дѣлаютъ 20 человекъ, то можно отсюда опредѣлить и число женщинъ, которое выдѣлится ежели число мушеровъ вычтется изъ 20, по чему число женщинъ $= 20 - x$. Каждой
мушера

мущина платитъ 8 грошей, слѣдов.
 x мущинъ заплатятъ $8x$ грошей. Каждая
 женщина платитъ 7 грош., то $20-x$
 женщинъ заплатятъ $140-7x$ грош. слѣ-
 довательно мущины и женщины вмѣстѣ
 платятъ $140+x$ грош.; а мы знаемъ
 сколько они истрапили, то есть 6 рейхс-
 талеровъ, которые въ грошахъ дѣлаютъ
 144, чего ради будемъ мы имѣть сле-
 уравненіе $140+x=144$, откуда ясно
 видно, что $x=4$.

И такъ въ трактирѣ было 4 мущи-
 ны и 16 женщинъ.

568.

Другой подобной сему вопросъ.

20 человекъ женщины и мущины вмѣ-
 стѣ были въ трактирѣ; мущины пла-
 тятъ 24 гулдена, и женщины также 24
 гулдена, при чемъ извѣстно, что каждой
 мущина долженъ былъ платить одинъ
 гулденъ больше нежели женщина, спра-
 шивается; сколько было мущинъ и
 сколько женщинъ?

А 3

Пусть

6 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Пусть будетъ число мужчинъ $=x$,
то число женщинъ будетъ $=20-x$
и когда x мужчинъ вмѣстѣ изтрапили
24 гулдена, то каждой изъ нихъ запла-
тилъ $\frac{24}{x}$ гулд.

$20-x$ женщинъ изтрапили 24 гулдена,
то каждая изъ нихъ издержала $\frac{24}{20-x}$ гулд.
и поелику сія издержка женщины однимъ
гуldenомъ меньше, нежели издержка му-
жины, то ежели изъ заплаченной суммы
денегъ мужчиною вычтется 1 гуldenъ,
останется издержка женщины, откуда
получится уравненіе $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$, и изъ
сего уравненія надлежитъ искать вели-
чину x , которую не такъ легко здѣсь
вывести можно, какъ въ первомъ вопро-
сѣ. Но въ слѣдующихъ увидимъ, что
 $x=8$ сходствуетъ съ найденнымъ ура-
венніемъ $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{20-8}$; $2 = 2$.

569.

Въ каждомъ вопросѣ главное дѣло
еостоитъ въ томъ, чтобъ означивъ
буквами неизвѣстныя или искомыя коли-
чества

чества разсмотрѣть починяе обстоятельство вопроса, и изъ нихъ вывести уравненіи ; потомъ разрѣшить найденное уравненіе , или сыскать величину неизвѣстныхъ чиселъ , о чемъ въ сей части говорено будетъ.

570.

Самые вопросы разнятся также между собою, ибо въ нѣкоторыхъ ищется только одно число, а въ иныхъ 2 или больше ; и въ семъ послѣднемъ случаѣ требуется столькожъ уравненій , сколько неизвѣстныхъ или искомыхъ количествъ въ немъ будетъ, которые всѣ выводить надобно изъ обстоятельствъ вопроса.

571.

И такъ уравненіе состоитъ изъ двухъ членовъ , изъ коихъ одинъ другому равенъ полагается ; а что бы изъ уравненія опредѣлить величину не извѣстнаго количества , потребны бывають часто весьма многіе перемѣны, кои всѣ основаніе свое имѣють на томъ , что

8 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

когда количества равны между собою , равны будутъ также , ежели къ обоимъ изъ нихъ одинаке величины придадутся , или изъ нихъ вычтутся ; равнымъ образомъ , ежели они оба на одно какое нибудь число умножатся или раздѣлятся , ежели они до одинакой степени возвысятся , или одинаке корни изъ нихъ извлекутся , и наконецъ ежели обоимъ ихъ примутся логарифмы , что уже и въ предыдущей части учено было.

572.

ТѢ уравненія , въ которыхъ кромѣ первой степени не извѣстнаго числа не находится , весьма легко рѣшаются , и называются уравненіями первой степени. Потомъ слѣдуютъ уравненія , въ которыхъ вѣроятная степень или квадратъ не извѣстнаго количества находится , и называются квадратными уравненія , или уравненія второй степени ; уравненія третьей степени , гдѣ кубъ не извѣстнаго количества находится , и такъ далѣе , о чемъ въ сей части объявлено будетъ.

ГЛАВА

ГЛАВА II.

Объ уравненіяхъ первой степени и ихъ рѣшеніи.

§73.

Если неизвѣстное, или искомое количество означится буквою x , и найдено уравненіе будетъ уже на одной сторонѣ знака $=$ имѣть одно только x , а на другой всѣ данныя числа, какъ $x=25$, то искомая величина x , уже дѣйствительно имѣется; и всегда стараться надобно дойти до сей формулы, какъ бы смѣшено ни было первое уравненіе. На сей конецъ въ слѣдующихъ предпишутся правила.

§74.

Начнемъ сперва съ самыхъ легкихъ случаевъ, и положимъ, что нѣкиво дошелъ до сего уравненія :

$x+9=16$, по видно, что $x=7$.

Пусть будетъ вообще $x+a=b$, гдѣ a и b означающъ данныя числа, какіябы

А 5

они

10 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

они ни были. Здѣсь должно съ обѣихъ сторонъ вычесть a , и получится уравненіе $x=b-a$, которое опредѣляетъ намъ величину x .

§75.

Если найденное уравненіе будетъ $x-a=b$, то придай съ обѣихъ сторонъ a , и будетъ $x=b+a$, что означаетъ величину x .

Точно также поступая надлежитъ, ежели первое уравненіе будетъ $x-a=aa+1$; ибо тогда $x=aa+a+1$, изъ уравненія $x-8a=20-ba$ получится $x=20-ba+8a$ или $x=20+2a$, а изъ $x+ba=20+3a$ найдется $x=20+3a-ba$, или $x=20-3a$.

§76.

Когда же найденное уравненіе будетъ $x-a+b=c$, то здѣсь можно съ обѣихъ сторонъ прибавить a , и выйдетъ $x+b=c+a$, потомъ вычесть съ обѣихъ сторонъ b , и будетъ $x=c+a-b$. Можно также съ обѣихъ сторонъ прибавить другъ $+a-b$, и будетъ $x=c+a-b$, такъ

такъ въ слѣдующихъ примѣрахъ , когда $x-2a+3b=0$, то будетъ $x=2a-3b$ когда $x-3a+2b=25+a+2b$, то будетъ $x=25+4a$, и когда $x-9+6a=25+2a$, то $x=34-4a$.

577.

Если найденное уравненіе имѣть будетъ формулу $ax=b$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на a , и будетъ $x=\frac{b}{a}$. А когда $ax+b=c+d$, то должно сперва то, что при ax находится отнять прочь, то есть, придать съ обѣихъ сторонъ $-b+c$, и будетъ $ax=d-b+c$, сего ради $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Пусть будетъ $2x+5=17$, то выдѣль
 $2x=12$, и $x=6$
 $3x-8=7$ выдѣль $3x=15$, и $x=5$
 $4x-5-3a=15+9a$, выдѣль $4x=20+12a$
 и $x=\frac{20+12a}{4}=5+3a$.

578.

Когда уравненіе будетъ $\frac{x}{a}=b$, то помножь съ обѣихъ сторонъ на a и будетъ $x=ab$. И когда $\frac{x}{a}+b-c=d$, то спер-

на

12 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

ва будетъ $\frac{x}{a} = d - b + c$ и потомъ $x = (d - b + c)a = ad - ab + ac$.

Пусть будетъ $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, то будетъ $\frac{1}{2}x = 7$,

и $x = 14$

--- $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$; $\frac{1}{3}x = 4 - a$, и $x = 12 - 3a$

--- $\frac{x}{a-1} - 1 = a$ --- $\frac{x}{a-1} = a + 1$; $x = (a + 1)$

$(a-1) = aa - 1$.

§79.

Если уравненіе будетъ $\frac{ax}{b} = c$, то умножь съ обѣихъ сторонъ на b , и будетъ $ax = cb$, и $x = \frac{cb}{a}$. Когда же $\frac{ax}{b} - c = d$, то будетъ $\frac{ax}{b} = d + c$, и $ax = bd + bc$, слѣд. $x = \frac{bd + bc}{a}$. Пусть будетъ $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, то $\frac{2}{3}x = 5$, $2x = 15$ и $x = \frac{15}{2}$ то есть $7\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 5$, то будетъ $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{8} = \frac{39}{8}$, $3x = 18$ и $x = 6$.

§80.

Статься можетъ, что больше нежели одинъ членъ уравненія содержитъ въ себѣ букву x , и сстоятъ на одной или на обѣихъ сторонахъ знака равенства. Если они будутъ на одной сторонѣ, какъ $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, то будетъ $x + \frac{1}{2}x = 6$, $3x = 12$,

$= 12$, и $x=4$. Пусть будетъ $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, что будетъ x ? Умножь сперва на 3 и выдешъ $4x+\frac{1}{2}x=132$, потомъ умножь еще на 2 и будетъ $11x=264$ слѣд. $x=24$; но сѣ три числа могутъ вдругъ соединены быть въ одинъ членъ, какъ $\frac{11}{6}x=44$, раздѣли съ обѣихъ сторонъ на 11, и выдешъ $\frac{1}{6}x=4$, и $x=24$.

Положи $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}x=1$, что соединивъ въ одинъ членъ дастъ $\frac{11}{15}x=1$, и $x=2\frac{2}{11}$ также когда $ax-bx+cx=d$, то сѣ будетъ тоже что и $(a-b+c)x=d$, откуда выдешъ $x=\frac{d}{(a-b+c)}$

581.

Когда же x находится въ обѣихъ частяхъ уравненія, какъ $3x+2=x+10$, то должно x съ одной стороны, гдѣ оно умножено на меньшее число, перенести на другую; чего ради вычти съ обѣихъ сторонъ x , и выдешъ $2x+2=10$, и $2x=8$, слѣд. $x=4$. Пусть будетъ еще $x+4=20-x$, то $2x+4=20$, $2x=16$ и $x=8$.

Положи $x+8=32-3x$, то будетъ $4x+8=32$, и $4x=24$, слѣд. $x=6$.

Также

Также $15 - x = 20 - 2x$, то $15 + x = 20$, слѣд. $x = 5$.

Пусть будетъ $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, то $1 + \frac{3}{2}x = 5$; $\frac{3}{2}x = 4$, откуда $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

— $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$; придай $\frac{2}{3}x$ выдетъ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$, вычти $\frac{1}{3}$ будетъ $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}$, умножь на 12 и получишь $7x = 2$, и $x = \frac{2}{7}$.

Также $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}x$, придай $\frac{2}{3}x$, выдетъ $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}x$, вычти $\frac{1}{4}$ будетъ $\frac{5}{6}x = 1\frac{1}{4}$ умножь на 6 получишь $7x = 7\frac{1}{2}$, раздѣли на 7, и будетъ $x = 1\frac{1}{14}$ или $x = \frac{15}{14}$.

582.

Если найдешь такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное число въ знаменателѣ дроби содержится, то должно тогда сію дробь исключить изъ уравненія умноживъ оное на помянушаго знаменателя.

Такъ когда найдется $\frac{100}{x} - 8 = 12$
то придай 8, и выдетъ $\frac{100}{x} = 20$,
умножь на x — — $100 = 20x$,
раздѣли на 20 будетъ $x = 5$.

Пусть еще будетъ $\frac{x+3}{x-1} = 7$,

умножь

умножь на $x-1$, выдешъ $5x+3=7x-7$,
 вычти $5x$, будешъ $3=2x-7$,
 придай 7, выдешъ $10=2x$, и слѣдъ $x=5$.

§83.

Иногда въ уравненіи попадаются
 также и коренные знаки, но уравненіе
 не смотря на то надлежитъ до первой
 степени какъ напр. когда ищется число
 x меньше 100 такое, чпобъ квадратной
 корень изъ $100-x$ равенъ былъ 8, или
 чпобъ $\sqrt{100-x}=8$, то возми съ обѣ-
 ихъ сторонъ квадраты, будешъ $100-x$
 $=64$, придай x , выдешъ $100=64+x$,
 вычти 64, останется $x=36$, или мо-
 жно бы было въ семъ случаѣ поступить
 и такимъ образомъ, когда $100-x=64$,
 то вычти 100, и останется $-x=-36$,
 умножь на -1 , произойдетъ $x=36$.

§84.

Иногда неизвѣстное число x нахо-
 дится въ показателѣ, какіе примѣры мы
 уже выше сего видѣли, и въ семъ случаѣ
 должно

16 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

должно приближенно имѣть къ логарифмическимъ.

Такъ когда найдется $2^x = 512$, и берутся съ обѣихъ сторонъ логарифмы, и будетъ $x \cdot \log. 2 = \log. 512$, раздѣли на $\log. 2$ выдѣлится $x = \frac{\log. 512}{\log. 2}$, что по таблицамъ найдется такъ:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300} \text{ слѣд. } x=9$$

пусть будетъ $5 \cdot 3^x - 100 = 305$, то придай 100, и будетъ $5 \cdot 3^x = 405$, раздѣли на 5, выдѣлится $3^x = 81$, взявъ логарифмы $x \cdot \log. 3 = \log. 81$, раздѣли на $\log. 3$ и выдѣлится $x = \frac{\log. 81}{\log. 3}$ или $x = \frac{\log. 81}{\log. 9}$

По таблицамъ будетъ $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$, по чему $x = 2$.

ГЛАВА III.

О рѣшеніи нѣкоторыхъ принадлежащихъ сюда вопросовъ.

§85.

Вопросъ : раздѣли число 7 на 2 части такъ , чтобъ большая часть была 3 мя больше нежели меньшая.

Пусть будетъ большая часть $= x$, то меньшая $= 7 - x$, и по обстоятельству вопроса должно быть $x = 7 - x + 3$, или $x = 10 - x$, придай x , будетъ $2x = 10$, раздѣли на 2, найдется $x = 5$.

Отвѣтъ: большая часть $= 5$, а меньшая $= 2$.

То же.

Общей вопросъ. Раздѣлить a на двѣ части такъ , чтобъ большая часть превышала меньшую числомъ b ?

Положи большую часть $= x$, то будетъ меньшая $= a - x$; чего ради $x = a - x + b$; придай съ обеихъ сторонъ x , и будетъ $2x = a + b$, раздѣли на 2, получится $x = \frac{a + b}{2}$

6

То же

Толк: II.

То же.

Второе рѣшеніе. Пустьъ будетъ большая часть $= x$, и когда она меньшую часть превышаетъ числомъ b , то меньшая часть, числомъ b будетъ меньше большей, и по сему меньшая часть $= x - b$, обѣ сія части вмѣстѣ должны составить число a , почему $2x - b = a$, придай b , и будетъ $2x = a + b$, раздѣливъ на 2, выдѣлѣ $x = \frac{a+b}{2}$ Большая часть, а меньшая $= \frac{a+b}{2} - b$ или $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ или $\frac{a-b}{2}$.

586.

Вопросъ. Послѣ отца осталось три сына и 1600 рейхсгалеровъ денегъ, а по оставленной имъ духовной старшей сынъ долженъ взять изъ ссей суммы 200 талеровъ больше средняго, средней 100 талеровъ больше нежели меньшей сынъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ возмемъ?

Положи наследственную часть третьяго сына $= x$, то будетъ часть второго

раго $=x+100$, первого $=x+300$, и всѣ сии при часпн сложенныя вмѣстѣ должны дѣлать 1600 талеровъ, чего ради $3x+400=1600$, вычпн 400, и будстѣ $3x=1200$, раздѣли на 3 выдетѣ $x=400$.

Опвиѣтѣ. Третій сынѣ возмеѣ 400, второй 500, а первой 700 талеровъ.

587.

Вопросѣ. По смерти отца оспалось 4 сына и 8600 талеровъ, а по завѣщпю покойнаго деньги сии между сыновьями должны бытъ раздѣлены такѣ, чтобѣ первой сынѣ взяѣ въ двое больше нежели второй безѣ 100 талеровъ; второй въ трие больше нежели третьей безѣ 200 талер; третий въ четверо больше нежели четвертой безѣ 300 талеровъ, итцется сколько каждой взяѣ?

Наслѣдственная часть четвертаго будстѣ x , претьяго $4x-300$, втораго $12x-1100$, первого $24x-2300$. и когда сумма всѣхъ сихъ частей должна со-

ставлятъ 8600 талеровъ , то получимъ
мы уравненіе:

$41x - 3700 = 8600$, придай 3700 , и
выдеиъ $41x = 12300$, раздѣли на 41 , ча-
стное даиъ $x = 300$.

Отвѣиъ. 4 пій сынъ взмееъ 300
талер. , 3 пей 900 талер. , 2 рои 2500
талер. , первой 4900 талеровъ .

§88.

Вопросъ. Нѣкто по смерти своей
оставилъ 1100 талеровъ , жену , двухъ
сыновей и трехъ дочерей , кои оставше-
ся имѣніе должны по силѣ духовной
раздѣлишь такъ , чтобъ жена покойнаго
взяла вдвое больше сына , сынъ въ двое
больше нежни дочь , спрашивается сколь-
ко каждому изъ нихъ достанется ?

Наслѣдственную часть одной дочери
положи $= x$, часть одного сына будеиъ $= 2x$,
и часть вдовы $= 4x$; слѣдовательно все
наслѣдство будеиъ $3x + 4x + 4x$, или $11x$
 $= 1100$; раздѣли на 11 , выдеиъ $x = 100$.
Отвѣиъ. Одна дочь получииъ 100 талер.
одиъ

одинъ сынъ — —	2000	— —
а мать возмётъ —	4000	— —
слѣд. 3 дочери возмутъ	3000	
2 сына —————	4000	
мать —————	4000	
<hr/>		
сумма = 11000 талер.		

589.

Вопросъ. Одинъ отецъ оставилъ по смерти своей трехъ сыновей, которые оставшееся послѣ него имѣніе должны раздѣлить между собою такъ, чтобъ первой сынъ взялъ 1000 талеровъ, меньше нежели половина всего наслѣдства, второй 800 талеровъ меньше нежели третей всего наслѣдства, третьей 600 талеровъ меньше четвертой доли всего наслѣдства, спрашивается сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи все наслѣдство = x
 то первой сынъ взялъ $\frac{1}{2}x - 1000$
 второй — — — — — $\frac{2}{3}x - 800$
 третьей — — — — — $\frac{1}{4}x - 600$
слѣдо-
бъ

Слѣдовательно всѣ три сына взяли $\frac{1}{2}x$
 $+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-2400$, которая сумма должна
 быть равна всему наслѣдству x , и такъ
 уравненіе будетъ $\frac{13}{12}x-2400=x$
 вычти x и будетъ $\frac{1}{12}x-2400=0$
 придай 2400 $-\frac{1}{12}x=2400$
 помножь на 12, $x=28800$.

Опавѣтъ. Всѣ наслѣдство было 28800
 рсхисл. изъ чего

первой сынъ взялъ 13400

второй — — — — 8800

третій — — — — 6600

Всѣ три — — 28800 талеровъ.

590.

Вопросъ. Оставшіеся по смерти
 отца 4 сына наслѣдство ихъ между со-
 бою дѣлятъ такъ, что первой взялъ
 3000 меньше половины всего наслѣдства,
 другой 1000 меньше нежели $\frac{1}{3}$ наслѣд-
 ства, третій точно $\frac{1}{4}$ всего наслѣдства,
 четвертой 600 талеровъ и еще $\frac{1}{5}$ на-
 слѣдства, спрашивается, сколь велико бы-
 ло наслѣдство, и сколько каждой сынъ
 взялъ?

Положи

Положи все наслѣдство $= x$

то взявъ первой $\frac{1}{4}x - 3000$

второй $\frac{1}{3}x - 1000$

третьей $\frac{1}{2}x$

четвер. $\frac{1}{4}x + 600$

всѣ 4 вмѣстѣ возмущ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$
 $= 3400$, что должно быть $= x$, чего ра-
 ди уравненіе

будетъ $\frac{7}{12}x - 3400 = x$

выпни x и будетъ $\frac{1}{12}x - 3400 = 0$

придай 3400 $== \frac{1}{12}x = 3400$

раздѣли на 12 $== \frac{1}{12}x = 3400$

умножь на 60 $== x = 12000$

Оувѣстѣ. Все наслѣдство было 12000 тал.

изъ кого первой сынъ возметъ 3000 тал.

— — — второй — — — — 3000

— — — третьей — — — — 3000

— — — четвертой — — — — 3000

591.

Вопросъ. Найди число, къ которо-
 му если придася его половина, сум-
 ма бы столько превышала 60, сколько
 самое число не достигнѣ до 65?

64

Пусть

24. ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Пусть будетъ искомое число $=x$, то будетъ
 $x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$
 придай, x выдетъ $\frac{5}{2}x - 60 = 65$
 придай 60 — — — $\frac{5}{2}x = 125$
 раздѣли на 5 — $\frac{1}{2}x = 25$
 умножь на 2 — $x = 50$
 Отвѣщъ. Искомое число есть 50.

592.

Вопросъ. Раздѣлить число 32 на двѣ части такъ, что ежели меньшая часть раздѣлится на 6, а большая на 5, сумма бы частныхъ равна была 6?

Пусть меньшая часть будетъ $=x$, то большая $= 32 - x$ меньшая часть раздѣленная на 6, дастъ $\frac{x}{6}$, а большая раздѣленная на 5, въ частномъ дастъ $\frac{32-x}{5}$, чего ради будетъ $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$
 умножь на 5, выдетъ $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$
 или $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$,
 придай $\frac{1}{6}x$, будетъ $32 = 30 + \frac{1}{6}x$,
 вычпи 30 — — — $2 = \frac{1}{6}x$
 умножь на 6 — — $x = 12$.
 Отвѣщъ. Меньшая часть будетъ 12, а большая $= 20$.

593.

Вопросъ. Сыскаѣ число , которое
если умножися на 5 , произведение
столькобъ не доспавало до 40 , чѣмъ
самое число меньше 12 ?

Положи искомое число x , котораго
недоспавокъ до 12 есть $12 - x$, и числа
самаго умноженнаго на 5 , то есть , $5x$ не
доспавокъ до 40 есть $40 - 5x$, что дол-
жно быть равно $12 - x$;
чего ради $40 - 5x = 12 - x$,
придай $5x$, то будетъ $40 = 12 + 4x$,
вычпи 12 — — — — 28 $= 4x$,
раздѣли на 4 — — — — $x = 7$,
Ошѣтѣ: искомое число есть 7.

594.

Вопросъ. Число данное 25 раздѣ-
лишь на двѣ части такъ , чтобъ боль-
шая часть была въ 49 разъ больше
меньшей ?

Пусть будетъ меньшая часть $= x$,
то большая $= 25 - x$; и сию большую
часть раздѣливъ на меньшую , въ частн-
номъ

65

номѣ должно выйти 49 ; чего ради
 $\frac{25-x}{x} = 49$

Помножь на x и выйдетъ $25 - x = 49x$,

придай $x - - - - 25 = 50x$,

раздѣли на 50 и будетъ $x = \frac{1}{2}$.

Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ $= \frac{1}{2}$, а
 большая $= 24\frac{1}{2}$, которую когда раздѣ-
 лишь на $\frac{1}{2}$, то есль, помножишь на 2,
 выйдетъ 49.

595.

Вопросъ. Данное число 48 , раз-
 дѣлять на 9 частей такъ , чтобъ ка-
 ждая часть послѣдующая , превышала
 свою предвѣдущую $\frac{1}{2}$?

Пусть будетъ первая и самая мень-
 шая часть x , то вторая будетъ $x + \frac{1}{2}$,
 третья $x + 1$, 4тая $x + 1\frac{1}{2}$ и такъ да-
 лѣе , понеже части сѣ дѣлаютъ про-
 грессію ариѳметическую, которой первой
 членъ $= x$, разность $\frac{1}{2}$, почему 9той
 членъ будетъ $x + 4$, къ которому при-
 ложивъ первой членъ x и сумму $2x + 4$
 умноживъ на число членовъ 9, произой-
 детъ $18x + 36$ двойная сумма прогрессіи,
 слѣд.

ѿбд. самая сумма будетъ $9x + 18$, которая должна быть равна 48, по чему $9x + 18 = 48$

вычти 18, и будетъ $9x = 30$,

раздѣли на 9 — — $x = 3\frac{1}{3}$.

Опѣвѣ. Первая часть будетъ $3\frac{1}{3}$,

а всѣ 9 частей супъ такѣ $3\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3}$

$+ 4\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3} + 6\frac{1}{3} + 6\frac{1}{3} + 7\frac{1}{3}$, коихъ всѣхъ сумма = 48.

596.

Вопросъ. Сыскать арифметическую прогрессию, которой первой членъ = 5 послѣдней = 10, сумма = 60? Здѣсь не дано ни разности ни числа членовъ прогрессии; но послѣднее изъ первого и послѣдняго членовъ можно бы было найти сумму всѣхъ, ежели бы число членовъ извѣстно было, то положи оное = x , сумма прогрессии будетъ $\frac{x}{2}x = 60$, раздѣли на 15, будетъ $\frac{1}{3}x = 4$ умножь на 2, выйдетъ $x = 8$. Когда число членовъ = 8, то положи разность оныхъ = z , по сему будетъ второй членъ = $5 + z$, третей = $5 + 2z$, осмой = $5 + 7z$, которой долженъ быть 10,

сѣдо-

слѣдовательно $5 + 7z = 10$,

вычти $5 - - 7z = 5$,

раздѣли на 7 $- z = \frac{5}{7}$.

Отвѣтъ. Разность прогрессіи есть $\frac{5}{7}$, а число членовъ 8, чего ради самая прогрессія будетъ:

$$5 + 5\frac{5}{7} + 6\frac{3}{7} + 7\frac{1}{7} + 7\frac{6}{7} + 8\frac{4}{7} + 9\frac{2}{7} + 10, \text{ коихъ сумма } = 60.$$

597.

Вопросъ. Сыскать число, которое ежели умножится на 2, изъ произведенія вычлется 1, изъ удвоеннаго остатка вычлется еще 2, и остатокъ раздѣлился на 4, чтобъ въ частномъ вышло число единицею меньше искомаго?

Пусть будетъ искомое число x , умножь на 2, выдѣль $2x$, вычти изъ сего 1, останется $2x - 1$, сей остатокъ умножь на 2, будетъ $4x - 2$, вычти 2, останется $4x - 4$, сей остатокъ раздѣли на 4, частное число $= x - 1$, что должно быть 1 меньше нежели x .

Посему

Посему $x-1=x-1$, сіе показываетъ намъ, что x совсѣмъ опредѣлить нельзя, но мѣсто его каждое число по изволѣнію брать можно.

598.

Вопросъ. Нѣкто купилъ нѣсколько локтей сукна давъ за каждые 5 локтей 7 талеровъ, продаетъ опять и беретъ за каждые 7 локтей 11 талеровъ, оиъ всего сукна барыша получаетъ 100 талер. Спрашивается сколько было всего сукна?

Положимъ что сукна было x локтей, и сперва смотрѣнь должно, сколько оно въ покупкѣ стоило, что по слѣдующей тройной посылкѣ сыщется:

5 локтей стоятъ 7 талер., что стоятъ x локтей? Оувѣствъ $\frac{7}{5}x$ талера, столько денегъ выдалъ онъ за сукно. Теперь посмотримъ, сколько онъ за него взялъ, по сему тройному правилу 7 локтей стоятъ въ продажѣ 11 талер. что будутъ стоять x локтей? Оувѣствъ.

$\frac{11}{5}x$

$\frac{1}{2}x$ талер.; и сія будетъ взятая за сукно
сумма, коипорая 100 талерами больше
нежели выданная, чего ради уравненіе
будетъ $\frac{1}{2}x = \frac{7}{8}x + 100$,

вычпи $\frac{7}{8}x$, останется $\frac{1}{8}x = 100$,

умножь на 35, будетъ $6x = 3500$,

раздѣли на 6, будетъ $x = 583\frac{1}{3}$.

Отвѣтъ. Слѣдовательно всего сукна бы-
ло $583\frac{1}{3}$ локтя, которые куплены за
816 $\frac{2}{3}$ талера, и потомъ проданы за 916 $\frac{2}{3}$
талера, почему барышь будетъ 100
талсровъ.

599.

Вопросъ. Нѣкто купилъ за 140 та-
леровъ 12 кусковъ сукна, въ семъ числѣ
были 2 куска бѣлые, 3 черныя и 7 си-
нихъ; кусокъ чернаго сукна стоилъ 2
талера больше нежели бѣлаго, а синяго
каждой кусокъ стоилъ 3 талера больше
нежели чернаго, спрашивается сколь до-
рого каждое изъ нихъ?

Положимъ, что кусокъ бѣлаго сукна
стоилъ x , и слѣд. 2 куска бѣлаго сто-
ить будутъ $2x$ талср.

Кусокъ

Кусокъ чернаго стоятъ будетъ $x+2$, слѣдов. 3 куска чернаго стоятъ $3x+6$ талеровъ.

Кусокъ синяго стоитъ $x+5$, слѣд. 7 кусковъ синяго стоятъ $7x+35$ талер.

Всѣ 12 кусковъ стоятъ $12x+41$; въ самомъ же дѣлѣ даны они 140 талер., что ради получимъ мы

уравненіе $12x+41=140$,
вычлп 41, останется $12x=99$,
раздѣли на 12, будетъ $x=8\frac{1}{4}$.

Отвѣщъ. Кусокъ бѣлаго сукна стоитъ $8\frac{1}{4}$ талер.

чернаго — — — $10\frac{1}{4}$

синяго — — — $13\frac{1}{4}$

600.

Вопросъ. Нѣкто купилъ мушкатыныхъ орѣховъ, и говоритъ, что цѣна 3хъ орѣховъ столько же превосходитъ 4 гроша, сколько цѣна 4хъ орѣховъ превышаетъ 10 грошей, спрашивается сколь дороги они были?

Говори когдѣ 3 орѣха стоятъ $x+4$ гроша, то 4 орѣха стоятъ будучъ $x+10$ грошей

грошей ; по тройномухъ правилу найдется , сколько 4 орѣха по первому положенію стоятъ будутъ , т. с. 3 орѣха спюятъ $x + 4$ грош. $= 4$ орѣх. Отивѣтъ $\frac{4x + 16}{3}$, и такъ будетъ , $\frac{4x + 16}{3} = x + 10$

или $4x + 16 = 3x + 30$,

вычти , $3x$ останется $x + 16 = 30$,

вычти 16 будетъ $x = 14$.

Отивѣтъ . 3 орѣха стоятъ 18 грошей , а 4 стоятъ 24 гроша ; слѣд. одинъ орѣхъ стоитъ 6 грошей .

601.

Вопросъ. Нѣкто имѣетъ 2 серебряныхъ стакана и одну крышку : первый стаканъ вѣситъ 12 лотовъ , но когда положится на него крышка , то вѣситъ онъ въ двое больше противъ другого ; если же наложится крышка на другой стаканъ , то вѣситъ онъ въ трое больше противъ первого , спрашивается сколько тяжезы крышка и другой стаканъ ?

Положи что крышка вѣситъ x лотовъ то первый стаканъ вмѣстѣ съ крышкой
тянутъ

платитъ. $x+12$ лотовъ, и понеже сей
вѣсѣ въ двое больше противъ другого
спакана, то другой спаканъ вѣситъ
 $x+6$ лотовъ; и когда наложимся на
нево крышка, то вѣситъ онъ $x+6$ лот.,
что должно быть 3. 12 лотовъ или 36;
откуда получимся уравненіе $x+6=36$
или $x=30$, и $x=10$, слѣд. $x=20$
Отвѣтъ. Крышка вѣситъ 20 лотовъ и
другой спаканъ 16.

602.

Вопросъ. Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ
у себя двухъ сортовъ монеты, перваго
сорта на одинъ талеръ идетъ a монетъ,
а другаго на столько же талеръ идетъ b
монетъ. Нѣкто желаетъ у нево взять
на талеръ c монетъ, спрашивается сколь-
ко обмѣнщикъ долженъ ему дать изъ ка-
ждаго сорта?

Положимъ что перваго сорта даетъ
ему обмѣнщикъ x монетъ, слѣд. друга-
го $c-x$, но понеже оныя x монетъ рав-
ны $\frac{x}{a}$ талер. ибо

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$; a c - x монетъ равны $\frac{c-x}{b}$ шалер. ибо $b : 1 = c-x : \frac{c-x}{b}$ слѣд. должно быть $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, или $\frac{bx}{a} + c-x = b$, или $bx + ac - ax = ab$, потомъ $bx - ax = ab - ac$; слѣдов. $x = \frac{ab - ac}{b-a} = \frac{a(b-c)}{b-a}$;
отсюда будетъ $c-x = \frac{bc - ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$

Отвѣтъ. Перваго сорта дастъ обмѣнщикъ на шалеръ $\frac{a(b-c)}{b-a}$ монетъ , а другаго $\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Примѣчаніе. Сія оба числа легко можно найти по тройному правилу ; первое находится $b-a : b-c = a : \frac{ab-ac}{b-a}$, другое $b-a : c-a = b : \frac{bc-ba}{b-a}$. При семъ примѣчать надлежитъ , что b больше нежели a , и c меньше нежели b , а больше нежели a , какъ самое дѣло требуетъ.

603.

Вопросъ Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя два сорта денегъ , перваго сорта идутъ 10 монетъ на шалеръ , другаго 20 , а требуетъ у него нѣкто 17 монетъ

нетѣ на талерѣ , спрашивается сколько получить онѣ изъ каждаго сорта ?

Вѣ семѣ случаѣ $a=10$, $b=20$, $c=17$, откуда выдѣли сѣ тройныя правила :

I. $10:3=10:3$, слѣд. перваго сорта возьмѣ 3; II. $10:7=20:14$, другаго возьмѣ онѣ 14.

604

Вопросѣ. Нѣкипо оставилѣ по смерти своей нѣсколько дѣтей и имѣнїе, которое дѣти дѣлятѣ между собою такѣ , что первой изѣ нихѣ беретѣ 100 талер. и еще дѣсятую часть оспальнаго имѣнїя.

Второй беретѣ 200 талер.	} и сверхѣ того всег-	
третьей - - - 300		да 10 тую часть ос-
четвертой - - 400		тальнаго имѣнїя.

и такѣ далѣе , и по сѣмѣ дѣлежѣ находится , что все имѣнїе раздѣлено было равено между ими ; спрашивается сколь велико было имѣнїе , сколько дѣтей было , и сколько каждой изѣ нихѣ взялѣ ?

Сей вопросѣ совсѣмѣ особливаго роду , и для того онѣ достоинѣ примѣча-

нія. Дабы его удобнѣе разрѣшить можно было, то положи все наслѣдственно x талерамъ; и понеже всѣ дѣти берутъ по ровну, то положи одного часанъ x , откуда видно что число дѣтей было $\frac{x}{x}$, и посему учредимъ мы рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

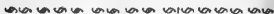
дѣл. деньги дѣти	каждого часанъ	разности
x	первой $x = 100 + x - 100$ 10	} = 100 - x - 10 10
$x - x$	второй $x = 200 + x - x - 200$ 10	
$x - 2x$	третей $x = 300 + x - 2x - 300$ 10	
$x - 3x$	четвер. $x = 400 + x - 3x - 400$ 10	
$x - 4x$	пятой $x = 500 + x - 4x - 500$ 10	
$x - 5x$	шестой. $x = 600 + x - 5x - 600$ 10	
$x - 6x$	седьмой $x = 700 + x - 6x - 700$ 10	
$x - 7x$	осьмой $x = 800 + x - 7x - 800$ 10	

и такъ далѣе

Въ послѣднемъ столбцѣ поставлены
 равенства, которыя происходятъ, ког-
 да каждого часть вычтешь изъ наслѣд-
 ственной части слѣдующаго; но поне-
 же всѣ сѣ части равны между собою,
 то каждая изъ сихъ разностей должна
 быть $= 0$, и когда по щастію нашлось,
 что всѣ помянутыя разности равны ме-
 жду собою, то довольно одну изъ нихъ
 положить $= 0$, откуда получимъ мы сѣ
 уравненіе: $100 \frac{-x-100}{10} = 0$, умножь
 на 10, и будетъ $1000 - x - 100 = 0$, или
 $900 - x = 0$ слѣд. $x = 900$.

Отсюда знаемъ уже мы, что каж-
 даго наслѣдственная часть $= 900$ талер.;
 возми теперь одно которое нибудь ура-
 вненіе въ 3 емъ столбцѣ, то первое бу-
 детъ $900 = 100 + \frac{x-100}{2}$, изъ котораго x
 найди надобно; чего ради помножь его
 на 2, и будетъ $1800 = 200 + x - 100$,
 или $1800 = 900 + x$, слѣд. $x = 900$ и $\frac{x}{2}$
 $= 450$.

Остатокъ. Число дѣлителей было 9, оставлен-
ное имѣнне 8100 талер. изъ косяго каж-
дой взялъ 900 талеровъ.



ГЛАВА IV.

О разрѣшеніи двухъ или больше уравненій
первой степени.

605.

Часто случается , что 2 или больше
неизвѣстныхъ чиселъ, означенныхъ бук-
вами x, y, z и проч. въ выкладку
входятъ , и тогда по числу неизвѣст-
ныхъ количествъ , въ задачѣ предложен-
ныхъ , столько же пребуется и уравне-
ній , по которымъ каждое неизвѣстное
число опредѣлить должно. Здѣсь ста-
немъ разсмапривать мы только такія
уравненія , въ которыхъ неизвѣстное
число не больше , какъ первой степени
находится ; припомъ гдѣ также ни од-
но ни другое не помножено , такъ что
каждое уравненіе имѣть будетъ видъ
 $ax + by + cz = d$.

606.

606.

И шакѣ начнемѣ мы оиѣ двухѣ уравненій , изѣ коихѣ два неизвѣстныхъ числа x и y опредѣлять станемѣ ; и дабы сіе вообще показать , то пусть будутѣ данныя уравненія I) $ax+by=c$ II) $fx+gy=b$,

гдѣ буквы a, b, c , и f, g, b положены мѣсто извѣстныхъ количествѣ , и спрашивается , какимѣ образомѣ изѣ сихѣ двухѣ данныхъ уравненій опредѣлимѣ неизвѣстные числа x и y .

607.

Самой легкой къ тому способѣ , изѣ каждаго уравненія опредѣлить величину одного неизвѣстнаго числа какѣ напр. x , потомѣ уравнивѣ обѣ сіи величины между собою , получишь одно уравненіе , въ которомѣ одно только неизвѣстное число y находится , которое по вышепоказаннымѣ правиламѣ опредѣлимѣ можно, а нашедѣ y положи только вмѣсто его самого найденную величину

40 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ
чину въ которомъ нѣбудъ изъ данныхъ
уравненій, и получишь x .

608.

Въ силу сего правила изъ первого
уравненія найдется $x = \frac{c-by}{a}$, а изъ дру-
гого $x = \frac{b-fy}{g}$, уравняй обѣ сіи величины
числа x , и получишь $\frac{c-by}{a} = \frac{b-fy}{g}$, умножь
на a и будетъ $c-by = \frac{ba-afy}{g}$; умножь на
 g получился $cg-fby = ba-afy$, придай afy про-
изойдетъ $fc+afy-fby=ab$, вычти fc будетъ
 $afy-fby=ab-fc$ или $(ag-fb)y=ab-fc$, раздѣли
на $ag-fb$, выйдетъ $y = \frac{ab-fc}{ag-fb}$; и ежели сію ве-
личину количества положимъ въ одну изъ
найденныхъ для x мѣсто y , то получится x .

Возми первую, и будетъ $-by = \frac{-cbb+ffc}{ag-fb}$

$$c-by = c - \frac{abb+ffc}{ag-fb},$$

или $\frac{acg-fcb-abf+ffc}{ag-fb}$, сіе $c-by = \frac{acg-abf}{ag-fb}$ раз-

дѣли на a , и будетъ $\frac{c-by}{a} = \frac{gc-ab}{ag-fb} = x$.

609.

609.

Что бы изъяснить сіе примѣромъ ,
то пусть будетъ заданъ сей вопросъ :
сыскать два числа, которыхъ сумма $= 15$,
а разность $= 7$?

Положи большее число $= x$, меньшее $= y$,
то будетъ 1) $x + y = 15$, 11) $x - y = 7$.

Изъ перваго уравненія найдется $x = 15$
 $- y$, а изъ другаго $x = 7 + y$, откуда
происходитъ сіе новое уравненіе

$$15 - y = 7 + y,$$

придай y и будетъ $15 = 7 + 2y$

вычти 7 — — — — $8 = 2y$

раздѣли на 2, будетъ $y = 4$ и $x = 11$.

Отвѣтъ. Меньшее число $= 4$, а большее $= 11$

610.

Сей вопросъ можно разрѣшить во-
обще, то есть найти два числа, ко-
ихъ сумма $= a$, а разность $= b$?

Пусть будетъ большее число $= x$, а
меньшее $= y$, то будетъ 1) $x + y = a$:
11) $x - y = b$.

В 5

Изъ

Изъ перваго уравненія получится $x = a - y$, а изъ другаго $x = b + y$, откуда происходитъ сіе уравненіе $a - y = b + y$; придай y и будетъ $a = b + 2y$

вычпи b , выдстѣ $a - b = 2y$

раздѣли на 2, будетъ $y = \frac{a - b}{2}$

и по сему $x = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$

Отвѣтъ. Слѣдовательно большее число $x = \frac{a + b}{2}$, а меньшее $y = \frac{a - b}{2}$, или $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Отсюда получается слѣдующее правило : большее число равно половинѣ суммы сложенной съ половиной разности ; а меньшее равно разности между половиною суммы и половиною разности.

611.

Сей вопросъ можно еще разрѣшить и такъ : когда оба уравненія суть $x + y = a$ и $x - y = b$, то сложи ихъ вмѣстѣ, и будетъ $2x = a + b$, слѣд. $x = \frac{a + b}{2}$ потомъ вычпи изъ перваго уравненія вто-

рос

рос, получится $2y = a - b$ и $y = \frac{a-b}{2}$ какъ и прежде.

612.

Вопросъ. Лошакъ и ослѣ каждой несѣтъ на хребтѣ своемъ по нѣскольку мѣшковъ, ослѣ на свою шаясь жалуюсь говоритъ къ лошаку, естли бы ты изъ своихъ мѣшковъ далъ мнѣ еще одинъ, тобъ у меня было въ двое больше твоего; на что лошакъ отвѣщаетъ ему говоря, естли бы ты изъ твоихъ мѣшковъ далъ мнѣ еще одинъ, тобъ было у меня въ трие больше твоего, спрашивается сколько мѣшковъ имѣлъ на себѣ каждой изъ нихъ?

Положимъ что на лошака было x мѣшковъ; а на ослѣ y , и когда лошакъ ослу дастъ одинъ мѣшокъ, то у осла будетъ $y + 1$ мѣшокъ, а у лошака останется $x - 1$, и послѣ въ семъ случаѣ на ослѣ будетъ въ двое больше мѣшковъ нежели на лошака, то выйдетъ $y + 1 = 2x - 2$.

Когда же ослѣ дастъ лошаку одинъ изъ своихъ мѣшковъ, то у лошака будетъ

дешъ $x+1$, а у осла $y-1$ мѣшковъ, и
поселику лошаки тогда имѣютъ въ прое-
больше, нежели оселъ, то будетъ $x+1$
 $= 3y-3$.

Слѣдовательно два уравненія наши
будутъ I) $y+1=2x-2$; II) $x+1$
 $= 3y-3$, изъ перваго найдемъ $x=\frac{y+3}{2}$,
изъ втораго $x=3y-4$, откуда прои-
ходитъ сіе новое уравненіе

$\frac{y+3}{2}=3y-4$, которое умноживъ на 2
будетъ $y+3=6y-8$

вычти у получится $5y-8=3$

придай 8 выдетъ $5y=11$

слѣд. $y=\frac{11}{5}$ или $2\frac{1}{5}$, откуда $x=2\frac{1}{5}$.
Ошѣтѣ. Лошакѣ имѣетъ $2\frac{1}{5}$, а оселъ
 $2\frac{1}{5}$ мѣшка.

613.

Ежели въ вопросѣ случатся 3 не-
извѣстныя количества и столькожъ ура-
вненій, какъ напр. I) $x+y+z=8$,
II) $x+z-y=9$; III) $y+z-x=10$, то по-
добнымъ образомъ изъ каждаго уравненія
найдемъ величина x какъ слѣд. I) $x=8$
 $-y-z$; II) $x=9+y-z$; III) $x=y+z-10$.

Уравни

Уравни сперва первое знаменованіе x со вторымъ , а потомъ съ третьимъ , отчего произойдутъ сія два уравненія I) $8 + z - y - 9 + y - z$; II) $8 + z - y - 9 + z - 10$, Изъ перваго будешь $2z - 2y = 1$, а изъ другаго $2y = 18$, почему $y = 9$; которую величину поставя въ предвѣдущей мѣсто y даешь $2z - 18 = 1$, $2z = 19$ и слѣд. $z = 9\frac{1}{2}$; отсюда найдется также $x = 8\frac{1}{2}$.

Здѣсь случилось , что въ послѣднемъ уравненіи буква z пропала , и для того можно было легко опредѣлить изъ него букву y . Но ежели бы z въ немъ еще остался, то было бы два уравненія между z и y , которыя бы по прежнимъ правиламъ рѣшить должно было.

614.

Пусть найдено будетъ 3 слѣдующія уравненія : I) $3x + 5y - 4z = 25$; II) $5x - 2y + 3z = 46$; III) $3y + 5z - x = 62$; ищи изъ каждого величину x , и будетъ I) $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$; II) $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$; III) $x = 3y + 5z - 62$; сравняй теперь сія три величин-

46 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

величины между собою , по I и III
дасть $25-3y+4z=3y+5z-62$, или помножа

на 3 $25-3y+4z=9y+15z-186$

придай 186, и будетъ $211-3y+4z=9y+15z$

придай $3y - - - 211+4z=14y+15z$,

слѣд. изъ I и III будетъ $211=14y+11z$.

II и III дасть $\frac{46+2y-3z}{5}=3y+5z-62$ или

$46+2y-3z=15y+25z-310$, а изъ сего

найдемъ $356=13y+28z$.

Изъ каждаго сихъ двѣхъ уравненій или
величину y . I) $211=14y+11z$, вычти
II. останется

$$14y=211-11z \text{ и } y=\frac{211-11z}{14}$$

II) $356=13y+28z$; вычти $28z$, останется

$$13y=356-28z, \text{ и } y=\frac{356-28z}{13}$$

сѣи два знаменованія буквы y уравнявъ
между собою дадутъ $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$.

умножь на 13.14 будетъ $2743-143z=4984$
 $-392z$

придай $392z$, будетъ $2743+249z=4984$

вычти $2743 - - 249z=2241$, и $z=9$

отсюда найдемъ $y=8$ и $x=7$.

615.

Ежели бы въ задачѣ было больше z хъ неизвѣстныхъ чиселъ, и столько же уравнений, то рѣшеніе можно бы учинить подобнымъ прежнему образомъ, но сіе бы ввело насъ въ скучнѣйшіе выкладки.

Однако во всѣхъ сихъ случаяхъ оказываются средства, помощію которыхъ сіе рѣшеніе облегчается: сіе дѣлается вводя въ выкладку сверхъ главныхъ неизвѣстныхъ чиселъ еще нѣкоторыя произвольныя, какъ напр. сумму ихъ всѣхъ, что легко усмотрѣть можно по тѣмъ, которой въ такихъ выкладкахъ уже довольно упражнялся; на сей конецъ предложимъ мы нѣсколько примѣровъ.

616.

Вопросъ. Гроше играющіе въѣсѣнѣ, въ первую игру проигралъ первой изъ нихъ обоимъ другимъ, столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; въ другую игру проигралъ второй первому и третьему, сколько

сколько каждой изъ нихъ имѣетъ , въ претню игру проигралъ претней первому и второму , столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ , и по окончаніи игры нашлось , что всѣ они по ровному числу имѣютъ , а именно 24 флорена , спрашивается сколько каждой изъ нихъ имѣлъ съ начала ?

Положи что первой имѣлъ x флореновъ , 2 рой y флор. 3 тей z флор. сверхъ сего положи сумму всѣхъ $x+y+z = s$. И когда въ первую игру первой столько проигрываетъ , сколько проигриваетъ имѣютъ , первой же имѣетъ x , то оба другіе $s-x$, и такое число теряетъ первой , слѣдовательно останется у него еще $2x-s$, второй имѣтъ будетъ $2y$ а претней $2z$.

Чего ради по окончаніи первой игры каждаго сумма будетъ I) $2x-s$. II) $2y$; III) $2z$.

Во вторую игру проигрываетъ другой , которой теперь имѣетъ $2y$, сбѣимъ другичѣмъ сколько сколько они имѣютъ . но они имѣютъ $s-2y$, слѣд. у другаго

гаго еще останется $4y - z$, другіе же оба будутъ теперь имѣть въ двое больше прежняго, слѣд. по окончаніи другой игры суммы ихъ I) $4x - 2z$; II) $4y - z$; III) $4z$; въ третью игру третей, которой имѣетъ $4z$, проигрываетъ обомъ другимъ, столько, сколько они имѣютъ, то есть $z - 4z$, слѣд. у третейго останется $8z - z$, прочіе же два получаютъ теперь въ двое больше, нежели они имѣли, слѣд. по окончаніи третьей игры суммы ихъ будутъ I) $8x - 4z$; II) $8y - 2z$; III) $8z - z$. Послѣку теперь каждой изъ нихъ имѣетъ 24 флорена, то будуще у насъ при уравненіи такого состоянія, что изъ перваго тотчасъ найти можно x , изъ другаго y , а изъ третейго z , особливо когда z такъ намъ извѣстно, ибо при концѣ игры есѣ вмѣстѣ имѣютъ 72 флорена, что само по себѣ найдется, а выкладка будетъ слѣдующая:

$$I) 8x - 4z = 24, \text{ или } 8x = 24 + 4z \text{ и } x = 3 + \frac{1}{2}z$$

$$II) 8y - 2z = 24, \text{ или } 8y = 24 + 2z \text{ и } y = 3 + \frac{1}{4}z$$

$$III) 8z - z = 24, \text{ или } 8z = 24 + z \text{ и } z = 3 + \frac{1}{7}z$$

Тоя: II

Г

слож

50 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ
 сложи всѣ сѣ величины вмѣстѣ , то по-
 лучится $x+y+z=9+\frac{7}{4}s$,

и после $x+y+z=s$, то будетъ $s=9+\frac{7}{4}s$, вычти $\frac{7}{4}s$, останется $\frac{1}{4}s=9$ и $s=72$.
 Отвѣтъ. Сѣ начала игры первой имѣлъ
 39 флор. второй 21 флор. третей 12
 флор.

Изъ сего рѣшенія видно , что помо-
 щю суммы трехъ неизвѣстныхъ чиселъ,
 всѣ выше упомянутыя трудности изъ
 выкладки вышли.

617.

Сколь ни труденъ сей вопросъ быть
 кажется , однакожъ можно его рѣ-
 шить и безъ алгебры. Начни только его
 съ конца, ибо когда три игрока по окон-
 чаніи претей игры равное число денегъ
 имѣютъ , то есть 24 флорена каждой .
 припомъ въ третью игру первой и вто-
 рой деньги свои удвоили , то предъ пре-
 тшею игрою имѣли они суммы слѣдую-
 щіе I) 12 ; II) 12 ; III) 48.

Во

Во вторую игру первой и претей суммы свои удвоили, слѣдовательно предъ второю игрою имѣли они.

I) 6 ; II) 4^2 , III) 24.

Въ первую игру удвоили свои деньги второй и претей, слѣд. предъ первую игрою имѣли они

I) 39 ; II) 21 ; III) 12,

столько же какъ и прежде мы нашли.

618.

Вопросъ. Два человека должны 29 талеровъ, у каждаго изъ нихъ есть деньги, однако не столько, чтобъ одинъ коптою нибудь могъ заплатить сей долгъ; чего ради первой другому говоритъ, если ты мнѣ дашь $\frac{2}{3}$ своихъ денегъ, то я въ состоянїи буду заплатить одинъ весь долгъ. Другой ему говоритъ, ежели ты мнѣ дашь $\frac{2}{3}$ своихъ денегъ, то я заплачу одинъ весь долгъ, спрашивается сколько у каждаго изъ нихъ было денегъ?

§2 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

Положи что первой имѣлъ x талер. другой y

то въ первыхъ будетъ $x + \frac{2}{3}y = 29$

и въ вторыхъ — — — — — $y + \frac{1}{4}x = 29$;

изъ перваго найдемъ $x = 29 - \frac{2}{3}y$, а изъ втораго $x = \frac{116 - 4y}{1}$.

Изъ обоихъ сихъ изображений x , выходитъ уравненіе $29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{1}$

откуда $y = 14\frac{1}{2}$ и $x = 19\frac{1}{2}$

Отвѣтъ. Первой имѣлъ $19\frac{1}{2}$, другой $14\frac{1}{2}$ талер.

619.

Вопросъ. Трое купили домъ за 100 талеровъ, первый проситъ у другаго $\frac{1}{2}$ его денегъ, и тогда бы онъ могъ одинъ заплатить за весь домъ; другой проситъ у третьяго $\frac{1}{3}$ его денегъ, чтобы ему одному можно было заплатить за весь домъ; третий проситъ у перваго $\frac{1}{4}$ его денегъ, и тогда онъ въ состояніи будетъ заплатить за весь домъ, спрашивается сколько денегъ у каждого изъ нихъ было?

Положи

положи что первой имѣлъ x , другой y , а третей z , то получаются слѣдующія уравненія:

I) $x + \frac{1}{2}y = 100$; II) $y + \frac{1}{3}z = 100$; III) $z + \frac{1}{4}x = 100$
и величина x найдется I) $x = 100 - \frac{1}{2}y$; II)
 $x = 400 - 4z$,

изъ второго уравненія x опредѣлить не
льзя , даѣ же найденныя сго величины
даюшъ уравненіе

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$, или $4z - \frac{1}{2}y = 300$, которое
соединивъ надлежитъ со вторымъ уравне-
ніемъ , чтобы найти опкуда y и z ; а
второе уравненіе было $y + \frac{1}{3}z = 100$, изъ
коего $y = 100 - \frac{1}{3}z$, а изъ уравненія $4z - \frac{1}{2}y$
 $= 300$ получится $y = 8z - 600$; опкуда
выходитъ съ послѣднее уравненіе

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$; слѣд. $8\frac{1}{3}z = 700$, или $\frac{25}{3}$
 $z = 700$ и $z = 84$; опсюда получится y
 $= 100 - 28 = 72$; $x = 64$.

Отвѣтъ. Первой имѣлъ 64 талер. дру-
гой 72 и третей 84 талера.

Понеже въ семъ примѣрѣ въ каждомъ уравненіи больше двухъ неизвѣстныхъ чиселъ не находится, то рѣшеніе сего способѣе можеть учиниться такъ:

Ищи изъ перваго уравненія $y = 200 - 2x$, которой чрезъ x опредѣлится, и сію найденную величину поставь во второмъ уравненіи мѣсто y ; и будетъ $200 - 2x + \frac{1}{2}x = 100$, вычти 100, останется $100 - 2x + \frac{1}{2}x = 0$, или $\frac{1}{2}x = 2x - 100$; и $x = 6x - 300$, слѣд. и x опредѣленъ также чрезъ x ; сію величину поставь въ третьемъ уравненіи мѣсто x , и будетъ $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, гдѣ одни только x содержатся, умножь на 4

и будетъ $25x - 1200 = 400$; слѣд. $x = 64$

$$y = 200 - 128 = 72$$

$$z = 384 - 300 = 84.$$

равнымъ образомъ поступать надлежитъ и въ шѣхъ случаяхъ, когда такихъ уравненій много будетъ.

Такъ

Такъ вообще

I) $u + \frac{x}{a} = n$, II) $x + \frac{y}{b} = n$; III) $y + \frac{z}{c} = n$; IV)
 $z + \frac{u}{d} = n$ или исключивъ дроби

I) $au + x = an$; II) $bx + y = bn$; III) $cy + z = cn$; IV) $dz + u = dn$. Въ семъ случаѣ изъ первой будетъ $x = an - au$, что поставя мѣсто x во второмъ уравненіи получится $abn - abu + y = bn$, слѣд. $y = bn - abn + abu$; сіе поставивъ мѣсто y въ третьемъ уравненіи будетъ $cbn - abcn + abcu + z = cn$, слѣд. $z = cn - bcn + abcn + abcu$, наконецъ положивъ въ четвертомъ уравненіи сію для z означенную величину, произойдетъ

$cdn - bcdn + abcdn - abcd u + u = dn$, слѣд. будетъ
 $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcd u + u$, или

$$(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1}$$

$$= n \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Отсюда найдутся уже прощія величины такъ :

Г 4

 $x = a$

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{a'cdn - abdn + abn - bn}{a'cd - 1} = \frac{n'(abcd - abd + ab - b)}{a'cd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + c'n - dn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

622.

Вопросъ. Одинъ капитанъ имѣетъ 3 роты салдавъ ; первая состоитъ изъ Швецовъ , другая изъ П'явцовъ , а третья изъ Саксонцовъ ; съ ними намѣренъ онъ осадить городъ , и въ награжденіе за оную оублачитъ имъ дать 904 талеръ , которые онъ между ими такъ раздѣлитъ намѣренъ ;

Каждой салдавъ изъ той роты , которая осаду вычнетъ , получитъ 1 талеръ , а остальные деньги раздѣлитъ между прочими поровну. Но въ сѣмъ случаѣ нашлось , что если бы Швейцарцы осаду начали, тобъ каждой изъ
обѣихъ

обѣихъ другихъ ротъ получилъ $\frac{1}{2}$ талера. Когда же бы осаду начали Швабы, то обѣ каждой изъ прочихъ получилъ $\frac{1}{3}$ талера; и наконецъ если бы Саксонцыю ной штурмъ начали, то обѣ каждой салдаиъ изъ прочихъ двухъ ротъ получилъ $\frac{1}{4}$ талера, спрашивается сколько было салдаиъ въ каждой ротѣ?

Положи что число Швейцаровъ было x , Швабовъ y , а Саксонцевъ z

Потомъ положи сумму всѣхъ $x + y + z = f$, ибо напередъ видѣть можно, что всю сумму выкладка облегчится. Когда осаду начнутъ дѣлать Швейцары, то ихъ число x , то число обѣихъ остальныхъ $= f - x$, и когда каждой изъ первыхъ возьмѣтъ 1 талеръ, снѣ напротивъ того $\frac{1}{2}$ талер., то будетъ $x + \frac{1}{2}(f - x) = 901$, или $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f = 901$.

Равнымъ образомъ, когда осаду начнутъ Швабы, то будетъ $y + \frac{1}{3}(f - y) = 901$, или $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}f = 901$; когда же осаждающіе станутъ Саксонцы, то будетъ

$x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 901$; или $2x + \frac{1}{2}y = 901$,
изъ сихъ трехъ уравнений каждую букву
 x, y, z , опредѣлить можно,

ибо изъ перваго получится $x = 1802 - \frac{1}{2}y$

изъ втораго — — — — $2y = 2703 - z$

изъ третьяго — — — — $3z = 3604 - s$,

написавъ ихъ теперь другъ подъ другомъ, съ-
скавъ напередъ величины $6x, 6y, 6z$

$$\text{такъ } 6x = 10812 - 3y$$

$$6y = 2703 - z$$

$$6z = 3604 - s$$

сложивъ вмѣстѣ будемъ $6s = 26129 - 11s$,
или $17s = 26129$, откуда $s = 1537$, что
показываетъ сумму всѣхъ людей въ 3хъ
родахъ находящихся.

Отсюда найдутся

$$x = 1802 - \frac{1}{2}1537 = 263$$

$$2y = 2703 - z = 1166 \text{ и } y = 583$$

$$3z = 3604 - s = 2067 \text{ и } z = 689.$$

Ошибѣтъ. Въ ромѣ Швейцаровъ было 263

человѣкъ, въ ротѣ Швабовъ 583, а въ ротѣ Саксонцовъ было 689 человекъ.

ГЛАВА V.

О рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ уравненій.

623.

Квадратное уравненіе называется, въ которомъ квадратъ или вторая степень неизвѣстнаго количества находится, и сверхъ того никакой вышшей степени нѣтъ; ибо если бы въ томъ же уравненіи находилась и третья степень неизвѣстнаго числа, то бы оно уже надлежало къ кубическому уравненію, котораго рѣшеніе особливыхъ правилъ требуетъ.

624.

Въ квадратномъ уравненіи при вещи примѣчанъ надлежитъ: во первыхъ такіе члены, въ которыхъ неизвѣстнаго числа нѣтъ, или которые изъ извѣстныхъ только количествъ состоятъ.

Во

60 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Во вѣпорыхъ нѣ членны, вѣ которыхъ неизвѣстное число первой степени находится,

и вѣ претвѣхъ нѣ члены, вѣ которыхъ содержащяся квадраты неизвѣстнаго количества.

Такъ когда x означаетъ неизвѣстное число, а буквы a, b, c, d представляющя извѣстныя, то члены первого рода имѣютъ форму a , вѣторого рода bx , и претвѣго рода члены имѣютъ формулу xx .

625.

Выше сего показано было, что два или больше члена одного роду могутъ соединены быть вѣ одинъ, или почестъся за одинъ членъ; такъ формула $axx + bxx + cxx$ можетъ почтена быть за одинъ членъ, и представляется $(a + b + c)xx$, потому что $a + b + c$ вѣ самомъ дѣлѣ извѣстное число означаетъ.

Когда такіе члены находятся будутъ по обѣимъ сторонамъ знака $=$, то видѣли мы какъ они на одну сторону

ну переносятся и въ одинъ членъ соединяюща.

Такъ когда случится уравненіе $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$,

то вычти сперва $2xx$, и получится $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$,

придай $8x$, и будешь $5x + 4 = 3xx + 11$,
вычти 11 останется $3xx = 5x - 7$

626.

Можно также всѣ члены перенести на одну сторону знака $=$, такъ что на другой сторонѣ останется 0; при чемъ примѣчать надлежитъ, что когда члены съ одной стороны знака $=$, на другую переносятся, то знаки ихъ переменять надлежитъ.

Такъ прежнее уравненіе получивъ такой видъ $3xx - 5x + 7 = 0$; вообще каждое квадратное уравненіе въ сей формулѣ заключается будетъ какъ: $axx + bx + c = 0$, гдѣ знакъ $+$ плюсъ и минусъ извѣщаются, дабы чрезъ то показать, что

что сіи члены могутъ быть иногда положительныя , а иногда отрицательныя.

627.

Какой бы видъ съ начала ни имѣло квадратное уравненіе, то всегда можно его привести въ формулу , которая имѣетъ только 3 члена ; такъ когда бы кто съ начала дошелъ до сего уравненія , какъ $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$, то прежде всего надлежитъ изъ него исключить дробь, и для того умножь на $cx+d$ и получится $ax+b$ $\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, по сему умножь еще на $gx+h$ и будетъ

$$\begin{aligned}
 agxx + bgx + ahx + bh &= cexx + cfx + edx + fd. \\
 \text{Сіе есть квадратное уравненіе и можетъ} \\
 \text{быть приведено въ слѣдующіе три члена,} \\
 \text{если они всѣ перенесутся на одну сто-} \\
 \text{рону и напишутся другъ подъ другомъ} \\
 \text{такъ :} \quad 0 &= agxx + bgx + bh \\
 &\quad - cexx + ahx - fd \\
 &\quad - cfx \\
 &\quad - elx
 \end{aligned}$$

или что бы еще яснее представить, то напиши $0 - (ag - ce)xx + (bg + ab - cf - cd)x + bb - fd$.

628

Такое квадратное уравненіе, въ которомъ всѣхъ трехъ родовъ члены находятся, называется полное квадратное уравненіе, и рѣшеніе его большимъ трудностямъ подвержено; для сей причины станемъ мы сперва разсматривать такія уравненія, въ коихъ одного изъ сихъ трехъ членовъ не достаетъ. Правда ежели въ уравненіи не будетъ члена xx , то его не можно причесть къ квадратному уравненію, но къ уравненіямъ перваго рода, или ежели бы не было въ немъ члена изъ извѣстныхъ количествъ состоящаго, то оно было бы $axx + bx = 0$, которое раздѣливъ на x выдетъ $ax + b = 0$, которое опять принадлежащъ къ роду простыхъ уравненій.

629.

Но когда въ уравненіи не достаетъ средняго члена, содержащаго первую степе-

64 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

степень x , то оно имѣетъ видъ $axx \pm c = 0$ или $axx = c$, какой бы знакъ при c ни былъ $+$ или $-$, такое уравненіе называется чистое квадратное уравненіе, для того что рѣшеніе его никакой трудности не имѣетъ; ибо раздѣли его только на a , то получится $xx = \frac{c}{a}$, и взявъ съ обѣихъ сторонъ квадратные корни будетъ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$, чрезъ что уравненіе разрѣшится.

630.

Здѣсь надлежитъ разсмотрѣть три случая:

1. Когда $\frac{c}{a}$ будетъ квадратное число, коего корень дѣйствительно извѣстно можно, и величина x опредѣлится тогда рациональнымъ числомъ, какое бы оно ни было, цѣлое или ломаное. Такъ изъ уравненія $xx = 144$ получится $x = 12$, а изъ $xx = \frac{9}{16}$ будетъ $x = \frac{3}{4}$.

2. Если $\frac{c}{a}$ будетъ не квадратное число то тогда довольствоваться должно кореннымъ закономъ V.

Такъ когда $ax=12$, то будетъ $x=\sqrt{12}$, коего величину можно опредѣлить приближенемъ, какъ уже выше сего показано было.

3. Если $\frac{c}{a}$ будетъ отрицательное число, то величина x будетъ совсѣмъ невозможная или мнимая, и показывася, что вопросъ, приведшей насъ къ сему уравненію, самъ по себѣ не возможенъ,

631.

Прежде нежели мы далѣе пойдемъ надлежитъ примѣтить, что какъ скоро изъ какого нибудь числа квадратной корень извѣстать должно будетъ, то всегда имѣетъ оной двоякое знаменованіе, то есть, какъ положительное, такъ и отрицательное, какъ уже прежде упомянуто было.

Толкъ II.

А

Такъ

Такъ ежели дойдемъ до уравненія $x = 49$, то величина x будетъ не только $+7$, но также и -7 ; и для того она всегда означается $x = \pm 7$, откуда явствуетъ, что всѣ сии вопросы имѣютъ двоякое рѣшеніе; но во многихъ случаяхъ, гдѣ напр. спрашивается о нѣкомъ числѣ людей, отрицаемая величина мѣста уже не имѣетъ.

632.

Равнымъ образомъ я въ прежнемъ случаѣ, гдѣ только не достаетъ однихъ извѣстныхъ чиселъ, какъ $axx = bx$, x всегда двоякое имѣетъ знаменованіе, не смотря на то что одно только останется, ежели уравненіе на x раздѣлится. Ибо ежели будетъ уравненіе $ax = 3x$, гдѣ такое x сыскать надлежитъ, чтобъ ax равнѣ былъ $3x$; то учинится сіе положивъ $x = 3$, которая величина выйдетъ ежели данное уравненіе раздѣлится на x . Но сверхъ сего вопросъ рѣшится также, когда положишь $x = 0$, ибо тогда будетъ $ax = 0$ и $3x = 0$. Вообще

ще при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ примѣчать надлежитъ, что они всегда имѣютъ два рѣшенія, напрошивъ того простыя не больше одного.

Изъяснимъ теперь сіи чистыя квадратныя уравненія нѣсколькими примѣрами.

633.

Вопросъ. Сыскать такое число, котораго половина умноженная на $\frac{1}{3}$ сего самая о, въ произведеніи дася 24?

Пусть будетъ сіе число $= x$. по произведеніе $\frac{1}{2}x$ на $\frac{1}{3}x$ должно дать 24 ; слѣдовательно будетъ $\frac{1}{6}xx = 24$.

Умножь на 6 выдетъ $xx = 144$, и извлечши квадратной корень получится $x = +12$; ибо ежели $x = +12$, то $\frac{1}{2}x = 6$ и $\frac{1}{3}x = 4$, коихъ произведеніе $= 24$. Равнымъ образомъ когда $x = -12$, то $\frac{1}{2}x = -6$ и $\frac{1}{3}x = -4$, сихъ чиселъ произведеніе будетъ также $= 24$.

634.

Вопросъ. Ищется число , къ которому естли приложися 5 и то же число изъ него вычется, то сумма первая умноженная на сию разность произведетъ 96.

Пусть будетъ оное число $=x$, то $x+5$ умноженное на $x-5$ въ произведении должно дать 96, по чему уравнение будетъ $x^2-25=96$.

Придай 25, то будетъ $x^2=121$, извлеки квадрати. корень, выдетъ $x=11$, ибо $x+5=16$, и $x-5=6$ и $6 \cdot 16=96$.

635.

Вопросъ. Сыскать число , которое когда приласия къ 10, и попомъ изъ 10 вычется, сумма бы умноженная на разность произвела число 51?

Искомое число положи $=x$, то $10+x$ на $10-x$ умноженное должно въ произведении дать 51; по чему уравнение будетъ $100-xx=51$, придай xx и вычши

чпи 51, то выдетъ $xx = 49$, и извлечши квадратной корень найдется $x = 7$.

636.

Вопросъ. Трое имѣютъ у себя деньги, сколько разъ первой имѣетъ 7 палеровъ, столько разъ имѣетъ другой 3 палера, и сколько разъ другой имѣетъ 17 палеровъ, столько разъ третей 5 палеровъ; а когда я сумму денегъ первого, на сумму второго, сумму денегъ второго на сумму третьего, и наконецъ сумму денегъ и третьего на сумму первого помножу, и потомъ всѣ сіи три произведенія сложу въ одну сумму, въ суммѣ выдетъ $3830\frac{1}{2}$. спрашивается сколько у каждого изъ нихъ денегъ было?

Положи, что у первого было x палеровъ, и когда сказано, что сколько разъ первой имѣетъ 7 палеровъ, столько разъ другой 3 палера, то сіе значитъ тоже, что деньги первого къ деньгамъ второго содержатся какъ 7:3, и такъ положа $7:3 = x$ къ деньгамъ другого $\frac{1}{3}$;

А 3

потомъ

70 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ
 потомъ деньги втораго къ деньгамъ
 прешьяго какъ 17:5, но будеть 17:5
 $= \frac{3x}{7}$ къ деньгамъ прешьяго $\frac{15x}{119}$.

Теперь умножь деньги перваго x , на
 сумму денегъ втораго $\frac{3x}{7}$, въ произведе-
 нии будеть $\frac{3xx}{7}$. Потомъ деньги втораго
 $\frac{3x}{7}$ умножь на деньги прешьяго $\frac{15x}{119}$ въ
 произведении $\frac{45xx}{833}$, наконецъ деньги прешья-
 го $\frac{15x}{119}$ умножь на деньги перваго x вы-
 деть $\frac{15xx}{119}$. Сии три произведенія $\frac{3}{7}xx$
 $+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx$ приведенные къ одному
 знаменателю, дадутъ $\frac{507}{833}xx$, что должно
 быть равно числу 3830 $\frac{1}{2}$.

Чего ради положивъ $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{1}{2}$,
 умножь на 3 и выдеть $\frac{1521}{833}xx = 11492$,
 умножь еще на 833 $1521xx = 957283\frac{1}{2}$,
 раздѣли на 1521, выдеть $xx = \frac{632806}{1521}$.
 Извѣди квадратной корень и будеть $x = \frac{794}{39}$,
 гдѣ раздѣливъ числителя на знаменателя
 на 13, выдеть $x = \frac{61}{3}$ или $x = 79\frac{1}{3}$, и слѣд.
 $\frac{3}{7}x = 34$, а $\frac{15}{119}x = 10$.

Отвѣтъ.

Отвѣтъ первой имѣетъ $79\frac{1}{2}$ палера ,
второй 34 , третей 10 палеровъ.

Примѣчаніе. Сію выкладку можно здѣ-
лать еще легче , разрѣшивъ находящіяся
въ оной числа на ихъ множителей , и
взѣмшъ особенно ихъ квадраты. Такъ
 $507 = 3.169$, гдѣ 169 есть квадратъ 13 ;
потомъ $833 = 7.119$, а $119 = 7.17$ слѣд.
 $833 = 49.17$. Но найдено $\frac{3.169}{49.17} . xx = 3830\frac{1}{2}$,
то умножь на 3 и выдѣль $\frac{6.169}{49.17} . xx = 11492$;
сіе число разрѣши на множителей , изъ
коихъ первой 4 тотчасъ найдется , такъ
что $11492 = 4.2873$, число 2873 можно
раздѣлить еще на 17 и будетъ $2873 = 17.169$; по чему уравненіе наше полу-
читъ видъ $\frac{9.169}{17.49} . xx = 4.17.169$, которое
раздѣливъ на 169 выдѣль $\frac{9}{17.49} . xx = 4.17$, и
потомъ умноживъ на 17.49 и раздѣливъ
на 9 выдѣль $xx = \frac{4.17.49}{9}$, гдѣ всѣ мно-
жители суть квадратныя числа , и корень
ихъ будетъ $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$. то же что и
прежде.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ наняли фактора и послали его въ Андорфъ торговать, къ чему каждой положилъ въ 10 разъ больше талеровъ, нежели сколько ихъ въ компаніи было; такимъ образомъ отправленной факторъ получилъ барыша на 100 талеровъ вдвое больше числа людей компанію составляющихъ; ежели же $\frac{1}{100}$ всего выигрыша умножишь на 2%, то въ произведеніи выстъ число купцовъ, спрашивается сколько ихъ всѣхъ было?

Положи число купцовъ было $=x$, и когда каждой положилъ въ компанію $10x$, то весь капиталъ былъ $10xx$ талеровъ. Факторъ выигрываетъ на 100 талеровъ $2x$ талера, слѣдовательно на весь капиталъ $10xx$ выигралъ онъ $\frac{1}{5}x^2$, и сотая часть сего выигрыша, то есть $\frac{1}{100}x^2$ умноженная на 2%, то есть на $\frac{20}{100}$ въ произведеніи дастъ $\frac{20}{100}x^2$ или $\frac{1}{5}x^2$ число равное числу купцовъ x .

И такъ уравненіе будетъ $\frac{1}{125}x^3 = x$ или $x^3 = 225x$, что кажется быль кубическое уравненіе; но послѣду его раздѣлить можно на x , по выдѣлѣ изъ него сіе квадратное $xx = 225$ и $x = 15$.

Отвѣтъ. Число всѣхъ купцовъ было 15 и каждой положилъ 150 талеровъ.

ГЛАВА VI.

О рѣшеніи смѣшенныхъ квадратныхъ уравненій.

638.

Смѣшенное квадратное уравненіе называется, въ которомъ находятся члены трехъ родовъ: первое такіе, которыя содержатъ въ себѣ квадраты неизвѣстнаго количества, какъ axx : второе, такіе въ которыхъ неизвѣстное первой степени находится, какъ bx : и на послѣдокъ такіе, кои составлены изъ извѣстныхъ чиселъ. Если два или больше члена одного роду соединятся въ одинъ,

74 СБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

и перенесутся на одну сторону знака $=$,
то форма такого уравненія будетъ ax
 $+ bx + c = 0$

Какимъ образомъ изъ такихъ уравне-
ній величина x находится, въ сей главѣ
наяснено быть должно, и къ чему имѣ-
емъ мы два способа.

639.

Такое уравненіе помощію дѣленія
можно разяорядить такъ, что первой
его членъ состоятъ будетъ только изъ
квадрата неизвѣстнаго количества xx ,
второй членъ оставъ на той же сторо-
нѣ, гдѣ и xx , а извѣстное число перене-
си на другую сторону, общего фор-
мула наша перемѣнится въ сію $xx + px$
 $= + q$, гдѣ p и q означающъ извѣстныя
какъ положительныя, такъ и отрица-
тельныя числа. Теперь дѣло состоятъ
въ томъ, чтобъ сыскать величину x ;
здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ,
что если бы $xx + px$ былъ точной
квадратъ, то и рѣшеніе бы не имѣло

ни

ни малой трудности, ибо тогдабѣ ничего больше не требовалось, какъ только съ обѣихъ сторонѣ взявъ квадрашныя корни.

640.

Но видно что $xx+px$ не точной квадратъ; ибо прежде сего видѣли мы, что ежели корень состоятъ изъ двухъ членовъ, какъ $x+n$, то квадратъ его будетъ имѣть 3 части, то есть сверхъ квадратовъ каждой части еще двойное произведеніе обѣихъ частей, такъ что квадратъ изъ $x+n$ будетъ $xx+2nx+n^2$; когда же мы на одной сторонѣ имѣемъ $xx+px$, то xx почтется можетъ какъ квадратъ первой части корня, а px двойное произведеніе первой части x на вторую, слѣдов. другая часть должна быть $\frac{1}{2}p$, какъ и въ самомъ дѣлѣ квадратъ изъ $x+\frac{1}{2}p$ находящися $xx+px+\frac{1}{4}p^2$.

641.

Послику $xx+px+\frac{1}{4}p^2$ есть дѣйствительной квадратъ, коего корень $x+\frac{1}{2}p$, то въ нашсмъ уравненіи $xx+px=q$ приравнимъ

Савимъ мы только съ обѣихъ сторонъ \sqrt{p} , и получится $x + \sqrt{p} + \sqrt{p} = \sqrt{p} + q$, гдѣ на одной сторонѣ сполниъ двѣ отрицательной квадратъ, а на другой только извѣстныя числа: и такъ ежели мы съ обѣихъ сторонъ возьмемъ квадратные корни, то получится $x + \sqrt{p} = \sqrt{p} + q$, вычти теперь \sqrt{p} , и будетъ $x = -\sqrt{p} + \sqrt{(\frac{1}{4}p + q)}$; а поелику каждой квадратной корень можетъ быть какъ положительной, такъ и отрицательной, того ради для x найдется двѣ величины содержащіяся въ формулѣ $x = -\sqrt{p} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p + q)}$.

642

Въ сей формулѣ содержится правило, по которому всѣ квадратныя уравненія рѣшаются, и что бы не всегда нужно было повторять прежнее дѣйствіе, то довольно одно только содержаніе сей формулы имѣть въ памяти; а уравненіе можно разпорядить такъ, что на одной его сторонѣ находится будетъ только ax , чего ради прежнее уравненіе будетъ имѣть

имѣль такой видъ $xx = -px + q$, изъ коего величина x означится такъ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + q\right)}$.

643.

Отсюда выводятся общее правило для разрѣшенія уравненія $xx = -px + q$.

А именно, здѣсь видно что не извѣстное число x равно будетъ половинѣ числа, которымъ x помножено на другой сторонѣ и сверхъ того еще $+$ или $-$ квадратной корень изъ квадрата числа теперь объявленнаго, и изъ простаго числа претси членъ уравненія составляющаго.

Такъ когдабъ случилось уравненіе $xx = 6x + 7$ тобъ было $x = 3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4$; слѣд. обѣ величины x будутъ I) $x = 7$; II) $x = -1$.

А когда уравненіе будетъ $xx = 10x - 9$, то $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)} = 5 \pm 4$, и два знаменованія x суть $x = 9$ и $x = 1$.

644.

Къ лучшему уразумѣнію сего правила можно различать слѣдующіе случаи: I) когда p будетъ четное число II) когда p не четное; III) когда p ломанное число.

Пусть будетъ I) p четное число, и уравненіе: такое $xx = 2px + q$, то будетъ $x = p \pm \sqrt{(pp + q)}$. II) ежели p не четное число и уравненіе такое $xx = px + q$, откуда $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ и когда $\frac{1}{4}pp + q = \frac{p^2 + 4q}{4}$, и изъ знаменателя 4 можно извлечь корень квадратной, то будетъ:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp + 4q)}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{(pp + 4q)}}{2},$$

645.

Ежели же III) p будетъ дробь, то рѣшеніе учинится такъ: пусть будетъ квадратное уравненіе $axx = bx + c$, или $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, то по объявленному правилу $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(bb + 4ac)}}{2a}$ или $x = \frac{b \pm \sqrt{bb + 4ac}}{2a}$ или $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4a^2} + \frac{c}{a})}$. Ибо когда $\frac{bb}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4a^2}$

и знаменатель квадратное число, то $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

б+б.

Другой путь, который насъ ведетъ къ сему же рѣшенію, состояющъ въ томъ, что бы такое смѣшенное квадратное уравненіе какъ $xx = rx + q$, преобразить въ другое чистое; что здѣлается гдѣ въ выкладку мѣсто неизвѣстнаго числа x другое y , такъ что $x = y + \frac{1}{2}r$; ибо когда найдешь y , то изъ него получишь и величина x .

Такъ если $y + \frac{1}{2}r$ поставишь мѣсто x , то будетъ $xx = yy + ry + \frac{1}{4}rr$ и $rx = ry + \frac{1}{2}rr$ и по сему уравненіе будетъ $xy + ry + \frac{1}{4}rr = ry + \frac{1}{2}rr + q$, вычти здѣсь сперва ry , и будетъ $xy + \frac{1}{4}rr = \frac{1}{2}rr + q$, вычти еще $\frac{1}{4}rr$, останется $xy = \frac{1}{2}rr + q$, и сіе есть чистое уравненіе, откуда $y = \sqrt{\frac{1}{2}rr + q}$.

Но понеже $x = y + \frac{1}{2}r$, то $x = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{2}rr + q}$; что уже и прежде найдено было. И такъ здѣсь болѣе ничего не остается

остается , какъ только сіе правило изъяснить примѣрами.

647.

Вопросъ. Найди два числа , изъ коихъ одно другое превышаетъ 6 тью , произведеніе же ихъ равно 91 ?

Пусть будетъ меньшее число x , то большее

$x+6$, и произведеніе ихъ $xx+6x=91$,
вычти $6x$, и выдѣль $xx=-6x+91$,

и по правилу показанному $x=-3 \pm \sqrt{(9+91)}=-3 \pm 10$; слѣд. $x=7$, или $x=-13$.

Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія , по первому находится меньшее число $x=7$, а большее $x+6=13$. По второму меньшее число $x=-13$, а большее $x+6=-7$.

648.

Вопросъ. Найди число , изъ квадрата коего ежели вычту 9, остатокъ тѣмъ же бы превышалъ 100, чѣмъ искомое число не достаеъ до 23 ?

Искомое

Искомое число пусть будетъ x , то $xx - 9$ превышаетъ 100 числомъ $xx - 109$, и искомое число до 23 не достигаетъ числомъ $23 \cdot x$, откуда происходитъ уравненіе $xx - 109 = 23 - x$

придай 109, будетъ $xx = -x + 132$, и по правилу данному $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 132\right)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{265}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{265}}{2}$ слѣд. $x = 11$ или $x = -12$.

Отвѣтъ. Если требуется отвѣтъ положительной, то искомое число $= 11$, ксого квадрата уменьшенной 9 тью даетъ 112, что превышаетъ 100 12 тью, и найденное число 11 столько же не достигаетъ до 23.

649.

Вопросъ. Найми число, котораго если $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ между собою умножатся, и къ произведенію придеется $\frac{1}{2}$ искомага числа, чтобъ вышло 30?

Пусть будетъ сіе число x , то $\frac{1}{2}$ умноженная на $\frac{1}{3}$ его даетъ $\frac{1}{6}xx$, къ чему
Толь II. Е прило-

82 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

приложивъ $\frac{1}{2}x$ получимъ $\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$;
что должно быть $= 30$,

умножь на 6 , получится $xx + 3x = 180$
или $xx = -3x + 180$, откуда найдемъ

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 180} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

слѣд. $x = 12$, или $x = -15$

650.

Вопросъ. Найти два числа , въ уловенной пропорціи , коихъ сумму ежели сложишь съ ихъ произведеніемъ , тобъ вышло 90 ?

Искомое число положь x , большее будетъ $2x$, произведеніе ихъ $2xx$, къ сему приложи сумму $3x$, выйдетъ 90 .

Слѣдовательно $2xx + 3x = 90$, вычти $3x$, останется $2xx = -3x + 90$, раздѣли на 2 , будетъ $xx = -\frac{3}{2}x + 45$,

откуда $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 45} = -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$.
По сему x будетъ или 6 , или $-7\frac{1}{2}$.

651.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадь за не извѣстное число талеровъ , а продастъ

ствѣ се опять за 119 талеровѣ, при чемѣ получаетѣ на 100 талеровѣ столько выигрыша, чего вся лошадь стоила, спрашивается, сколько онѣ за нее далѣ?

Положи что лошадь ему стоила x талер., и понеже онѣ на нее выигралѣ x процентовѣ, то положи что на 100 талеровѣ выигрываетѣ онѣ x , сколько на x барыша получится? Отвѣстѣ $\frac{xx}{100}$; и когда онѣ барыша получилѣ $\frac{xx}{100}$, а заплатилѣ самѣ x талер., то долженѣ онѣ взять за нее $x + \frac{xx}{100}$, и по тому будетѣ $x + \frac{xx}{100} = 119$,

вычти x , и будетѣ $\frac{xx}{100} = -x + 119$,

умножь на 100, получится, $xx = -100x + 11900$,

откуда $x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120$.

Отвѣстѣ. Лошадь стоила ему 70 талеровѣ, и послѣку онѣ выигралѣ на оныя 70 процентовѣ, слѣд. барышъ его будетѣ 49 талеровѣ. По чему долженѣ онѣ ее продать за $70 + 49$, то есть за 119 талеровѣ.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ себѣ нѣсколько суконъ , одно за 2 шалера , другое за 4 шалеръ пренѣе за 6 шалеръ увеличивая всегда двумя шалерами цѣну каждаго слѣдующаго сукна , а за всѣ сукна заплатилъ онъ 110 шалеровъ , спрашивается сколько всѣхъ суконъ было ?

Пусть число суконъ было x , а сколько онъ заплатилъ за каждое , покажетъ слѣдующее представленіе:

за 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , — — — x
 заплатилъ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ... $(x-1)2+2=2x$.

И что бы найти цѣну всѣхъ суконъ , то должно арифметическую прогрессию 2 , 4 , 6 , 8 , 10 — — $2x$ сослѣдующую изъ x членовъ сложить въ одну сумму , чего ради по вышеобъявленному правилу сложивъ первой членъ съ послѣднимъ , и будешь $2x+2$, сумму умножь на число членовъ x , въ произведеніи $2xx+2x$ произведшую двойную сумму прогрессіи раздьли на 2 , и получится искомая сумма

про-

прогрессіи $xx + x$, которая должна быть равна 110.

Вычти x , то будетъ $xx = -x + 110$
 слѣд. $x = -\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 110}$ или $x = -\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{11}{4}} = -\frac{1}{x} + \frac{11}{2} = 10$.

Отвѣстѣ. Всѣхъ суконъ куплено было 10 кусковъ.

653.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ нѣсколько суконъ за 180 талер., и ежели бы за тѣ же деньги можно было взять еще три куса, тобъ каждой кусокъ пришелъ ему дешевле 3 мя талерами, спрашивается сколько всѣхъ суконъ онъ купилъ?

Число суконъ пусть будетъ x , то каждой кусокъ дѣйствительно стоилъ $\frac{180}{x}$ талеровъ, а ежели бы онъ получилъ $x + 3$ куса за 180 талер. тобъ каждой кусокъ обошелся въ $\frac{180}{x+3}$ талер., которая цѣна 3 мя талерами меньше, нежели самая наслоящая; чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$,

Е 3

умножь

умножь на x и будешъ $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$,

раздѣли на 3, выдешъ $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$,

умножь на $x+3$, получится $60x = 60x$
 $+ 180 - xx - 3x$,

придай xx , будешъ $xx + 60x = 180 + 57x$

вычши $60x$, выдешъ $xx = -3x + 180$;

откуда $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 180\right)}$ или $-\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Отвѣтъ. За 180 талеровъ куплено 12 суконъ, по чему каждое стоило 15 талеровъ; если же бы онъ взялъ 3 куска больше, то есть 15 за 180 талеровъ, тобъ каждое стоило 12 талеровъ, то есть время меньше, нежели въ самомъ дѣлѣ.

654.

Вопросъ. Двое положили въ торгъ 100 талеровъ, первой оставляетъ деньги свои на 3 мѣсяца, а другой только на 2 въ компаніи, и каждой изъ нихъ взялъ 99 талеровъ вмѣстѣ съ капита-
ломъ

домѣ и барышемъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ положилъ?

Ежели первой положилъ x талеровъ, то другой $100 - x$, и когда первой беретъ 99 талеровъ, то барышь его $= 99 - x$, которой онъ получилъ въ 3 мѣсяца на капиталъ x ; другой беретъ также 99 талеровъ, и выигрышъ свой $= 99 - 100 + x = x - 1$, которой онъ приобрѣлъ въ 2 мѣсяца на капиталъ $100 - x$, на сей же самой капиталъ $100 - x$ въ три мѣсяца можно бы получить $\frac{3x-3}{2}$, слѣд. сѣи выигрыши капиталамъ пропорціональны, то есть, перваго капиталъ содержится къ его выигрышу, такъ какъ капиталъ втораго къ своему выигрышу, такъ.

$x : 99 - x :: 100 - x : \frac{3x-3}{2}$ положивъ произведеіе крайнихъ и среднихъ членовъ равными будемъ $2xx = 9900 - 199x + xx$, умножь на 2, будемъ $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$, вычпи $2xx$, остан. $xx - 3x = 19800 - 398x$, придай $3x$ ——— $xx = -395x + 19800$;

по чему $x = -\frac{895}{2} + \frac{\sqrt{156025} + 79200}{4}$
или $x = -\frac{895}{2} + \frac{415}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Отвѣтъ. По сему первой положилъ 45 талеровъ, а другой 55: 45 пью талерами въ 3 мѣсяца выигралъ первой 54 талера, и слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ получилъ прибыли 18 талеровъ.

Другой съ 55 пью талерами въ 2 мѣсяца получаетъ прибыли 44 талера, слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ досталъ 22 талера, что съ борышемъ первого также сходно; ибо когда на 45 талер. въ 1 мѣсяцъ выигрываетъ 18 талер., то на 55 въ то же время получится 22 талера.

655.

Вопросъ. Двѣ крестьянки несутъ на рынокъ 100 яицъ, у одной больше нежели у другой; денегъ же выручаяющъ поровну. Первая говоритъ другой скажи бы твои яйца были у меня, то бы выручила я 15 крѣйцеровъ, на что другая отвѣщаетъ, а если бы твои яйца

лицы имѣла я, тобы я за нихъ взяла $6\frac{2}{3}$ крейцера; спрашивается сколько у каждой было?

Положимъ что первая имѣла x лицъ, то другая $100-x$, чего ради ежели бы первая $100-x$ продала за 15 крейцеровъ, то поставь тройное правило

$100-x : 15 = x : \frac{15x}{100-x}$ крейцеровъ: подобнымъ образомъ надлежитъ поступать и въ другомъ случаѣ, то есть, когда другая x лицъ продать хотѣла за $6\frac{2}{3}$ крейцера, найти можно, сколько она за свои $100-x$ лицъ выручила, а именно:

$$x : \frac{20}{3} = 100-x : \frac{2000-20x}{3x} \text{ крейцер.}$$

и послѣку обѣ крестьянки выручили поровну, то будетъ у насъ уравненіе $\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$, которое умножь на $3x$ будетъ $\frac{45xx}{100-x} = 2000-20x$

умножь еще на $100-x$ получился $45xx = 200000 - 4000x + 20xx$, вычл. $20xx$ останется $25xx = 200000 - 4000x$

90 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

раздѣли на 25, выдѣстѣ $xx = -160x + 8000$,
и слѣдовательно $x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)}$

$$\text{или } x = -80 + 120 = 40.$$

Отвѣтъ. У первой было 40 яицѣ, а
у другой. 60, и каждая изъ нихъ выручила
10 крейцеровѣ.

656.

Вопросѣ. Двое продали нѣсколько
локтей бархату, второй 3 локтя боль-
ше первого, а выручаютѣ вмѣстѣ 35
талеровѣ; первый другому говоритѣ,
за твоей бархатѣ могѣ бы я взять 24 та-
лера, другой ему отвѣтившесѣ, а я бы
за твоей взялѣ 12¹/₂ талера; спрашивается
сколько локтей каждой изъ нихъ имѣлѣ?

Положи что у первого было x лок-
тей, то у другого $x + 3$ локтя; и ко-
гда бы первой за $x + 3$ локтя взялѣ 24
талера, слѣд. свои x локтей продалѣ онѣ
за $\frac{24x}{x+3}$ талера, и когда другой x локтей
хочѣшѣ продать за 12¹/₂ талера, то свои
 $x + 3$ локтя продалѣ онѣ за $\frac{25x + 75}{2}$,

и оба вмѣстѣ выручили они $\frac{24x}{x+3}$

$$+ \frac{25x + 75}{2x} = 35,$$

$$\text{или } \frac{48xx}{x+3} + 25x + 75 = 70x,$$

$$\text{или } \frac{48xx}{x+3} = 45x - 75,$$

умножь на $x+3$, $48xx = 45xx + 60x - 225$,
вычши $45xx$, $3xx = 60x - 225$,

$$\text{или } xx = 20x - 75;$$

$$\text{откуда } x = 10 \pm \sqrt{(100 - 75)} = 10 \pm 5.$$

Ошѣтѣ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія, по первому первой имѣетъ 15 локтей, а другой 18, и понеже первой 18 аршинъ хотѣлъ продать за 24 тал., то за свои 15 взялъ онъ 20 талер. другой за 15 локтей хотѣлъ взять 12½ тал., то за свои 18 взялъ онъ 15 талер.; и оба взяли 35 тал.

По второму рѣшенію, первой имѣетъ 5 локтей, а другой 8, первой продалъ

далъ бы 8 локтей за 24 талера , по
свои 5 продалъ за 15 талер. другой 5
локтей первого продалъ бы за 12 талер.
слѣд. за свои 8 выручилъ онъ 20 тале-
ровъ, и оба вмѣстѣ 35 талеровъ.



ГЛАВА VII.

Объ извлеченіи корней изъ многоугольныхъ
чиселъ.

6.7.

Выше сего уже мы показали , какъ
многоугольные числа находятся , и что
мы тамо бокомъ называли, то называется
также и корнемъ. Если корни оу-
начатся буквою x , то многоугольные
числа найдутся слѣдующія :

3 угольное будетъ $\frac{xx+x}{2}$

4 " " "  " " " xx

$$5 \text{ угольное будетъ } \frac{3xx-x}{2}$$

$$6 \text{ " " } \mathcal{M} \text{ " " } 2xx-x$$

$$7 \text{ " " } \mathcal{N} \text{ " " } \frac{5xx-3x}{2}$$

$$8 \text{ " " } \mathcal{M} \text{ " " } 3xx-2x$$

$$9 \text{ " " } \mathcal{N} \text{ " " } \frac{7xx-5x}{2}$$

$$10 \text{ " " } \mathcal{M} \text{ " " } 4xx-3x$$

$$n \text{ " " } \mathcal{M} \text{ " " } \frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$$

658.

Помощью сей формулы не трудно для каждаго бока или корня сыскать многоугольное число, сколь бы велико число угловъ ни было, о чемъ уже и выше сего упомянуто. Если же обрат-но дано будетъ многоугольное число нѣ-сколькихъ сторонъ, то корень его или бокъ находить гораздо труднѣе; ибо для сего требуется рѣшеніе квадратнаго ура-
вненія

64 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

вненія. По чему матерія сія особливаго разсмотренія досшойна.

Начнемъ сперва съ треугольныхъ , а потомъ приступимъ и къ многугольнымъ числамъ.

659.

Данное треугольное число пусть будетъ 91, сыскавъ его бокъ или корень?

Положи искомой корень $= x$, по должно быть $\frac{xx+x}{2} = 91$, умножь на 2 , выдеишь $xx + x = 182$, вычти x , останется $xx = -x + 182$ и слѣдоват. $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 182} = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13$; слѣд. искомой треугольника корень $= 13$, потому что треугольникъ изъ $13 = 91$.

660.

Пусть будетъ вообще данное треугольное число a , котораго корень найтн должно.

Искомой корень пусть будетъ $= x$, по $\frac{xx+x}{2} = a$, или $xx + x = 2a$, и $xx = -x + 2a$, откуда $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2a}$ или $x = -\frac{1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}$

Отсюда

Отсюда получаемъ мы сіе правило :
умножь данное треугольное число на 8,
къ произведенію придай 1 , изъ суммы
извлеки квадратной корень , и изъ сего
вычпи единицу ; остатокъ раздѣли на 2,
частное дасть искомой треугольника
корень.

661.

Отсюда явствуетъ , что всѣ т. е.
угольники имѣютъ сіе свойство , по
скольку , когда они на 8 умножатся и къ
произведенію придастся 1, въ суммѣ все-
гда выходящъ квадратное число , какъ
изъ слѣдующей таблички видно:

1 уголи.	1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28 ; 36 и пр.
В разѣ +1	9 ; 25 ; 49 ; 81 ; 121 ; 169 ; 225 ; 289 и пр.

Если же данное треугольное число
а сего свойства не имѣетъ , то сіе зна-
читъ , что оно не дѣйствительное тре-
угольное число , или что корня сего въ
раціональныхъ числахъ показать нельзя.

662.

По сему правилу чпо бы сыскать корень з угольнаго числа 210 , будетъ $a = 210$, $8a + 1 = 1681$, коего квадратной корень 41 ; ошсюда видно , чпо число 210 есть дѣйствительное треугольное число , коего корень $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Ежели бы число 4 взято было какъ з угольное число , коего бы корень найти должно было , по оной былъ бы $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$, слѣд. неизвлекаемой , какъ и дѣйствительной изъ сего корня з угольникъ найдется слѣдующимъ образомъ.

Понже $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, по $xx = \frac{17-\sqrt{17}}{2}$, къ сему приложи x , будетъ $xx + x = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$, и слѣд. треугольное число $\frac{xx+x}{2} = 4\frac{1}{4}$.

Поелику четырехугольные числа тоже самое суть чпо и квадратныя , слѣдовательно не имѣютъ они ни малой трудности ; ибо положивъ четырехугольное число $= a$, и слѣд. $x = \sqrt{a}$, по сему
ква-

му квадратныя и четьреугольныя корни
одно значащѣ,

664.

Приступимъ шеперь къ пятиуголь-
нымъ числамъ. Пусть будетъ 22 пяти-
угольное число, и корень его $= x$, то
должно быть $\frac{5xx-x}{2} = 22$ или $3xx-x=44$,
или $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$, откуда найдется $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})}$, то есть: $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1+1584}{36}} = \frac{1}{3} + \frac{39}{6}$
 $= 4$ слѣд. 4 есть искомой пятиугольной
корень числа 22.

665.

Пусть предложенъ будетъ вопросъ :
даннаго пятиугольнаго числа a сыскать
корень?

Искомой корень положи $= x$, и най-
дется уравненіе $\frac{5xx-x}{2} = a$, или $3xx-x=2a$,
или $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$, откуда $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3})}$,
то есть: $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1+24a}{36}}$, и такъ ежели a
будетъ дѣйствительной пятиугольникоу,
то $24a+1$ должно быть всегда квадрат-
ное число.

Толк. II.

Ж

Пусть

Пусть будетъ напр. 330 данной пятиугольникъ , то корень его $x = \frac{1+\sqrt[5]{330}}{4}$
 $= \frac{1+\sqrt[5]{330}}{4} = 15.$

666.

Даннаго шестипугольнаго числа а
 сыскашь его корень ?

Положи его $= x$, то будетъ $2xx - x$
 $= a$, или $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, откуда $x = \frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}a)}$
 $= \frac{1+\sqrt{1+4a}}{4}$ и такъ когда а есть
 дѣйствительной шестипугольникъ , то
 $8a + 1$ долженъ быть квадратъ. Отсюда
 видно, что всѣ шестипугольныя числа со-
 держатся въ треугольныхъ , корни же
 ихъ опмѣннаго свойства.

Пусть будетъ напр. 6тиугольное чис-
 ло 1225 , то корень его $x = \frac{1+\sqrt[6]{1225}}{4}$
 $= \frac{1+\sqrt[6]{1225}}{4} = 25.$

667.

Даннаго семипугольнаго числа а ,
 найди его бокъ или корень ?

Положи искомой корень $= x$, то бу-
 детъ $\frac{5xx-1x}{2} = a$, или $5xx - 3x = 2a$, или
 $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2a}{5}$, откуда $x = \frac{3}{10} + \sqrt{(\frac{9}{100} + \frac{2a}{5})}$
 $=$

$= \pm \sqrt{\frac{100}{10} + 9}$. И такъ всѣ семиугольныя числа суть такого состоянія, что если они на 40 умножась и къ произведенію придастся 9, сумма всегда должна быть квадратное число.

Пусть будетъ напр. семиугольникъ 2059, то корень его найдется $x = \frac{1 + \sqrt{10 \cdot 2059}}{10}$
 $= \frac{1 + 147}{10} = 29$.

668.

Даннаго осьмиугольнаго числа a сыскаль корень x ?

Въ семъ случаѣ будетъ $3xx - 2x = a$,
 или $xx = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$, откуда $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}\right)}$
 $= \frac{1 + \sqrt{3a + 1}}{3}$

3

По сему всѣ осьмиугольныя числа имѣютъ свойство такое, что когда они умножась на 3, и къ произведенію придастся 1, сумма всегда быть должна квадратное число.

Пусть будетъ наприм. 8угольное число 3816, то корень его $x = \frac{1 + \sqrt{11449}}{3}$
 $= \frac{1 + 107}{3} = 36$.

3

Ж 2

669.

669.

Наконецъ пусть будетъ дано n ,
угольное число a , сыскать его корень x ?
Въ семъ случаѣ будетъ $\frac{(n-2)xx - (n-4)x}{2}$

$$= a, \text{ или } (n-2)xx - (n-4)x = 2a; \text{ или } \\ xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$$

$$\text{откуда } x = \frac{n-4 + \sqrt{(n-4)^2 + \frac{2a}{n-2}}}{2(n-2)} \\ = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2 + 8a(n-2)}{4(n-2)^2}}$$

$$\text{слѣдов: } x = \frac{n-4 + \sqrt{8(n-2)a + (n-4)^2}}{2(n-2)}$$

Сія формула содержитъ въ себѣ общее правило, изъ данныхъ чиселъ находить всѣ возможные многоугольные корни.

А дабы сіе изъяснить примѣромъ, то пусть дано будетъ 24 угольное число 3009, и помыслъ здѣсь $a=3009$, $n=24$, $n-2=22$, $n-4=20$, то будетъ корень $x = \frac{20 + \sqrt{52984 + 4000}}{44} = \frac{20 + 711}{44} = 17.$

ГЛАВА VIII.

О извлеченіи квадратныхъ корней изъ биномѣ , или двучленного числа.

670.

Биномѣ въ Алгебрѣ называется число изъ двухъ частей состоящее , въ коихъ одна, или обѣ коренной знакъ при себѣ имѣютъ. Какъ $3 + \sqrt{5}$ есть биномѣ , также $\sqrt{3} + \sqrt{3}$; припомъ все равно, какимъ бы знакомъ сіи двѣ части ни соединены были , по естѣ или знакомъ $+$, или $-$, слѣд. $3 - \sqrt{5}$ будетъ также биномѣ называться, какъ и $3 + \sqrt{5}$.

671.

Сіи биномѣ особливо для того примѣчанія достойны , что при разрѣшеніи квадратныхъ уравненій такіа формулы подаются , ежели рѣшеніе не можѣтъ быть рационально.

Такъ когда случится уравненіе $xx = bx - 4$, то будетъ $x = 3 + \sqrt{5}$. Для сей примѣ

Ж 3

чины

чины, такія формулы весьма часто попадаютъ въ Алгебраическихъ выкладкахъ, и мы уже выше сего показали, какимъ образомъ обыкновенныя дѣйствія сложения, вычитанія, умноженія и дѣленія съ такими числами дѣлаются; а теперь покажемъ какимъ образомъ изъ такихъ формулъ изъ квадратной корень извлекать надлежитъ, если такое извлеченіе учинится можетъ; въ противномъ случаѣ приставляется къ ней еще коренной знакъ, то есть квадратной корень изъ $3 + \sqrt{2}$ есть $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

672.

При семъ примѣчать надлежитъ, что квадраты такихъ биномовъ суть также биномы, въ коихъ одна часть рациональна.

Ибо когда ищется квадратъ изъ $a + \sqrt{b}$, то будетъ оной $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$, такъ что если изъ формулы $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ потребуется опять квадратной корень, то будетъ оной $a + \sqrt{b}$, которой бесспорно лучше уразумѣть можно, нежели когдабъ

когдабъ предѣ прежнюю формулою еще знакъ $\sqrt{}$ поставился. равнымъ образомъ ежели формулы $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ возьмется квадратъ, которой будстѣ $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, то обратно изъ формулы $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ корень будстѣ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, которая формула также простяе, какъ когда предѣ прежнюю знакъ $\sqrt{}$ поставленъ будстѣ.

673.

Чего ради въ семъ случаѣ нужно только сыскать карактеръ, по которому бы всегда узнавать можно было, имѣетъ ли такой квадратной корень мѣсто или нѣтъ. На сей конецъ возьмемъ мы какую нибудь легкую формулу и рассмотримъ, можноли изъ биномія $5 + 2\sqrt{6}$ симъ образомъ найти квадратной корень.

Положи что сей корень $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ксего квадратъ $= (x + y) + 2\sqrt{xy}$ и которой долженъ быть равенъ $5 + 2\sqrt{6}$; слѣд. рациональная часть $x + y$ должна быть $= 5$, а нсизвлекаемая $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$, откуда происходитъ $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, и взявъ

Ж 4

сб

съ обѣихъ сторонѣ квадраты , будетъ $xy=6$; и когда $x+y=5$, то $y=5-x$, которую величину положи въ уравненіе $xy=6$, выйдетъ $5x-xx=6$, или $xx=5x-6$ слѣд. $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{36}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$.

И такъ когда $x=3$, то $y=2$, и корень квадратной изъ $5+2\sqrt{6}$ будетъ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Имѣя здѣсь сіи два уравненія I.) $x+y=5$; II.) $xy=6$ покажемъ особый путь , какъ , и оппуда находить x и y , который состоятъ въ слѣдующемъ :

Понемъ $x+y=5$, то возми квадраты $xx+2xy+yy=25$, и замѣшь, что $xx-2xy+yy$ есть квадратъ изъ $x-y$; изъ уравненія $xx+2xy+yy=25$ вычми $xy=6$ 4 жды взятое. или $4xy=24$. то получишь $xx-2xy+yy=1$, косто корень квадратной $x-y=1$, и поелику $x+y=5$, то будетъ $x=3$, $y=2$; по сему искомой корень изъ $5+2\sqrt{6}$ есть $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

675.

675.

Разсмотримъ теперь сей общей биномъ $a + \sqrt{b}$. Положа квадратной его корень $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ получимъ уравненіе $(x+y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, гдѣ $x+y=a$ и $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$, или $4xy=b$ квадратъ изъ $x+y=a$ есть $xx+2xy+yy=aa$, вычши изъ него $4xy=b$, и будетъ $xx-2xy+yy=aa-b$, корню квадратной корень $x-y = \sqrt{(aa-b)}$, и после $x+y=a$, то найдетъся $x = \frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$ и $y = \frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$

Слѣдовательно искомой квадратной корень изъ $a + \sqrt{b}$ будетъ $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

676.

Ся формула гораздо связнѣе, нежели какъ когдабъ предъ даннымъ биномъ $a + \sqrt{b}$ поставленъ былъ дробно коренной знакъ $\sqrt{}$, то есть $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Но она облегчится, ежели числа a и b будутъ такого соотвѣстія, что $aa-b$ будетъ точной квадратъ, ибо тогда $\sqrt{}$ позади кореннаго знака $\sqrt{}$ пропадетъ. Отсюда видно что только въ нѣхъ слу-

Ж 5

чаяхъ

106 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХ.

чаяхъ изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$ квадратной корень извлечъ можно, когда $aa - b = cc$; и тогда искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, когда же $aa - b$ не квадратное число, то квадратнаго корня способомъ означивъ не лзя, какъ кореннымъ знакомъ $\sqrt{}$.

677.

Отсюда получаемъ мы правило для способнѣйшаго означенія квадратнаго корня изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$. Къ сему требуется чтобъ $aa - b$ было квадратное число, и ежели оно $= cc$, то искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; причемъ еще примѣять надлежитъ, что квадратной корень изъ $a - \sqrt{b}$ есть $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ибо ежели сей формулы возмется квадратъ, то оной будетъ $a - 2\sqrt{\frac{aa - cc}{4}}$; а поелику $cc = aa - b$, то $aa - cc = b$, слѣд. сей квадратъ $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \sqrt{b}$.

678.

И такъ когда изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$, должно будетъ извлечъ корень квадратной

ной, то вычти квадратъ рациональной части aa изъ квадрата ирраціональной b , изъ остатка извлеки корень квадратной, которой пусть будетъ c ; по сему требуемой квадратной корень $= \sqrt{\frac{c+c}{2}} + \sqrt{\frac{c-c}{2}}$.

679.

Если должно будетъ найти квадратной корень изъ $2 + \sqrt{3}$, то будетъ $a=2$, $b=3$ и $aa-b=1$, коего корень $c=1$, слѣдоват. искомой квадратной корень $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Пусть будетъ еще биномъ $11 + 6\sqrt{2}$, то въ немъ $a=11$, $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$, и $b=36 \cdot 2=72$ и $aa-b=49$, слѣд. $c=7$, и квадратной корень изъ $11 + 6\sqrt{2}$ будетъ $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Найди квадратной корень изъ $11 - 2\sqrt{30}$: здѣсь $a=11$, $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$, $b=120$ и $aa-b=1=c$ слѣд. искомой корень $= \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

680.

Сие правило имѣетъ также мѣсто, когда въ задачѣ случаются мнимыя или невозможныя числа.

Такъ если данъ будетъ сей биномъ $1 + 4V - 3$, то $a = 1$, $Vb = 4V - 3$ и $b = 16 - 3 = -48$, $aa - b = 49$; слѣд. $c = 7$, и искомой квадратной корень будетъ $V4 + V - 3 = 2 + V - 3$.

Пусть дано будетъ еще $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V - 3$, то $a = -\frac{1}{2}$, $Vb = \frac{1}{2}V - 3$, и $b = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$; откуда $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3$; и $c = 2$, слѣд. искомой квадратной корень $= V\frac{1}{4} + V - \frac{11}{2} = \frac{1}{2} + \frac{V - 11}{2}$, или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V - 3$.

Слѣдующей примѣръ, въ которомъ находится квадратной корень изъ $2V - 1$, примѣчанія достойнъ. По сликъ здѣсь рациональн. и части не находится, то адо, $Vb = 2V - 1$, и $b = -4$, а $aa - b = 4$ слѣд. $c = 2$; почему искомой корень будетъ $V1 + V - 1 = 1 + V - 1$, коего квадр. $1 + 2V - 1 - 1 = 2V - 1$.

681.

Ежели бы надлежало разрѣшить уравненіе такое, какъ $xx = a \pm \sqrt{b}$, и было бы $aa - b = cc$, то величина x нашла бы $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, что во многихъ случаяхъ имѣетъ немалую пользу.

Пусть будетъ напр. $xx = 1 + 12\sqrt{2}$, то будетъ $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

682.

Сіе имѣетъ мѣсто особливо при разрѣшеніи уравненій четвертой степени, какъ $x^4 = 2axx + d$; ибо когда здѣсь положится $xx = y$, то $x^4 = y^2$, слѣд. данное уравненіе переимѣнится въ $yy = 2ay + d$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{a^2 + d}$; чего ради мѣсто перваго уравненія будетъ $xx = a \pm \sqrt{a^2 + d}$; откуда надлежитъ извлечь еще квадратной корень; понеже здѣсь $\sqrt{b} = \sqrt{aa + d}$ и $b = aa + d$, то будетъ $aa - b = -d$, и ежели $-d$ будетъ к адрату, то есть: cc или $d = -cc$, то можно будетъ изъять и корень. Почему пусть будетъ $d = -cc$, или дано сіе

сіе уравненіе 4 той степени $x^4 - 2axx - cc$,
то величина x изъ него найдется $x =$
 $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

683.

Изъяснимъ теперь сіе нѣсколькими
примѣрами.

Сыскають два числа, коихъ произведеніе
равно 105, а сумма ихъ квадратовъ
равна 274?

Положи искомыя числа x и y , то
получатся поочасѣ два уравненія I) xy
 $= 105$; II) $x^2 + y^2 = 274$, изъ первого на-
ходящся $y = \frac{105}{x}$, что положи мѣсто y , во
второмъ уравненіи будетъ $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$,
умножь на xx , и будетъ $x^4 + 105^2 = 274$
 xx , или $x^4 = 274xx - 105^2$; и естли сіе
сравнимъ съ прежнимъ уравненіемъ, то
будетъ $2a = 274$, и $a = 137, -cc = -105^2$,
сѣдов. $c = 105$, откуда найдется $x =$
 $\sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4$. сѣдова-
тельно x равно или 15, или 7, въ пер-
вомъ случаѣ $y = 7$, а во второмъ $= 15$,
по чему оба искомыя числа суть 15 и 7.

Здѣсь примѣчать надлежитъ , что выкладка сія еще легче здѣлана быть можетъ ; ибо когда $xx + 2xy + yy$ и $xx - 2xy + yy$ суть квадраты , припомъ какъ $xy + yy$, такъ и xy извѣстны , то послѣднее надлежитъ только удвоить , и какъ къ первому приложитъ , такъ изъ него и вычепъ , какъ здѣсь видно :

$xx + yy = 274$, приложи сперва $2xy$ и будетъ $xx + 2xy + yy = 484$ и $x + y = 22$, потомъ вычпи $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy = 64$ и $x - y = 8$; отсюда будетъ $2x = 30$, и $x = 15$; $2y = 14$ и $y = 7$. Подобнымъ сему образомъ можетъ разрѣшенъ быть и сей общей вопросъ . Сыскать два числа , коихъ произведение $= m$, и сумма ихъ квадратовъ $= n$?

Искомыя числа пусть будутъ x и y , то найдутся два слѣдующія уравненія : I) $xy = m$; II) $xx + yy = n$; $2xy = 2m$, чего ради придавъ $2xy$ выдесть $xx + 2xy + yy = n + 2m$, и $x + y = \sqrt{n + 2m}$, потомъ вычпи $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy$

$$\begin{aligned}
 &+ yu = n - 2m, \text{ по } x - y = \sqrt{n - 2m}, \\
 &\text{откуда } x = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} + \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m} \\
 &\text{и } y = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} - \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m},
 \end{aligned}$$

685.

Пусть предложѣнъ будетъ еще сей вопросъ: сыскать два числа, коихъ произведеніе $= 35$, и разность квадратовъ ихъ $= 24$?

Положи большее искомое число x , а меньшее y , и выдеи двѣ уравненія, I) $xy = 35$; II) $x^2 - y^2 = 24$, и поелику въ прежнемъ случаѣ употребленная выгода здѣсь мѣста не имѣетъ, то поступай обыкновеннымъ образомъ, и найдется изъ перваго уравненія $y = \frac{35}{x}$, что положивъ во второмъ уравненіи мѣсто y дастъ $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, умножь на xx и будетъ $x^4 - 1225 = 24xx$ или $x^4 = 24xx + 1225$. Поелику здѣсь послѣдней членъ имѣетъ знакъ плюсъ, то прежняго уравненія здѣсь употребить нельзя, потому что $cc = -1225$, и слѣд. с было бы не возможно.

ДЛЯ

Для сей причины кладется $xx = z$ и выходитъ $zx = 24x + 1225$, откуда $z = 12 + \sqrt{144 + 1225}$ или $z = 12 + 37$, слѣдов. $xx = 12 + 37$, то есть $xx = 49$ или $xx = -25$; по первому знаменованію будетъ $x = 7$ и $y = 5$; а по другому $x = \sqrt{-25}$, и $y = \sqrt{-25}$, или $= \sqrt{\frac{1+25}{-25}}$, или $= \sqrt{-49}$.

686.

Въ заключеніе сей главы прибавимъ еще сей вопросъ :

Найти два числа, коихъ сумма, произведеніе и разность квадратовъ равны между собою?

Большее число пусть будетъ x , а меньшее y , то сии три формулы должны быть равны между собою I) $x + y$; II) xy ; III) $xx - yy$; и ежели первая сравнивается со второю, то будетъ $x + y = xy$, отсюда взи x ; ибо $y = xy - x = x(y - 1)$, то $x = \frac{y}{y - 1}$, слѣд. $\frac{xy}{y - 1} = x + y$, и $xy = \frac{y^2}{y - 1}$, и слѣд. сумма равная произв-
Толк II 3 дствію

денно должна быть также равна равно-
сти квадратовъ, и припомъ будетъ xx

$$-xy = \frac{xy}{xy-2y+1} - xy = \frac{-y^2+2y^2}{xy-2y+1}, \text{ что}$$

прежней всличинѣ $\frac{xy}{y-1}$ равно; того

$$\text{ради будетъ } \frac{xy}{y-1} = \frac{-y^2+2y^2}{xy-2y+1}, \text{ раздѣли}$$

$$\text{на } xy \text{ и будетъ } \frac{1}{y-1} = \frac{-xy+2y}{xy-2y+1}, \text{ по-}$$

сему умножь на $y-1$, выдѣль $1 =$

$$\frac{-xy+2y}{y-1}, \text{ умножь еще на } y-1, \text{ будетъ}$$

$$y-1 = -xy+2y, \text{ слѣдов. } xy = y+1.$$

отсюда найдется $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \text{ чего ради } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{5}-1};$$

а что бы здѣсь вывести коренной знакъ

изъ знаменателя, то умножь сверху и

$$\text{снизу на } \sqrt{5}+1, \text{ и будетъ } x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Отебѣ.

Отвѣтъ. Бoльшee искомое число $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, а меньшее $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; ихъ сумма $x + y = 2 + \sqrt{5}$, произведение $xy = 2 + \sqrt{5}$, и поелику $xx = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$ и $yy = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, то разность квадратовъ $xx - yy = 2 + \sqrt{5}$.

687.

Поселику показанное рѣшеніе нѣсколько трудновато, то легче можно его здѣлать симъ образомъ: положи сперва $x + y$ равно разности квадратовъ $xx - yy$, то есть: $x + y = xx - yy$; и понеже здѣсь можно раздѣлить на $x + y$, попому что $xx - yy = (x + y)(x - y)$, то получится $1 = x - y$, откуда $x = 1 + y$, и слѣдовательно $x + y = 2y + 1$, и $xx - yy = 2y + 1$, что должно быть еще равно произведенію $xy = yy + y$; почему $yy + y = 2y + 1$, откуда такъ какъ и прежде найдемся $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3 2

688.

Сие ведетъ насъ еще къ слѣдующему вопросу: сыскать два числа, коихъ сумма, произведение и сумма ихъ квадратовъ равны между собою?

Искомая числа пусть будутъ x и y , то слѣдующіе три формулы равны между собою, то есть: I) $x+y$; II) xy ; III) $xx+yy$.

Если первая изъ нихъ уравниается со второй, то есть, положимъ $x+y=xy$, то найдемъ $x=\frac{y}{y-1}$, и $x+y=\frac{yy}{y-1}$, что равно также xy , и отсюда

$xx+yy=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, что положимъ равно $\frac{yy}{y-1}$. Умножь на $(y-1)^2$, и будемъ $y^3-2y^2+2yy=y^3-yy$, или $y^3=3y^2-3yy$; раздели на yy , произойдетъ $y^2=3y-3$ и $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$,
отсю-

отсюда $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, слѣд. $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$,
 умножь сверху и снизу на $1 - \sqrt{-3}$, то
 , будетъ $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$, или $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$

Отвѣтъ. Оба искомыя числа будутъ
 $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$ и $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, сумма ихъ
 $x + y = 3$, произведеніе $xy = 3$; и когда
 $xx = \frac{3 - 3\sqrt{-3}}{2}$ и $yy = \frac{3 + 3\sqrt{-3}}{2}$, то
 будетъ $xx + yy = 3$.

689.

Сія выкладка не мало облегчившя
 можетъ особливѣе къ тому средствѣ,
 что также и въ другихъ случаяхъ упо-
 трѣблять можно; а состоятъ оно въ томъ,
 чтобъ искомыя числа не двумя разными
 буквами, но суммою и разностию двухъ
 другихъ изъяснено было.

Такъ въ первой задачѣ положи одно
 искомое число $p+q$, а другое $p-q$, сум-
 ма ихъ $= 2p$, произведеніе $= pp-qq$, а
3 2
сумма

сумма ихъ квадратовъ $2pp + 2qq$; всё сие при часпи должны быть между собою равны. Положи первую равну второй, т. е. $2p = pp + qq$, отсюда $qq = pp - 2p$. Сие знаменованіе положи въ шестей формулѣ мѣсто qq , то будетъ $4pp - 4p$, что уравнивъ съ первой будетъ $2p = 4pp - 4p$, придай $4p$ и выдѣтъ $6p = 4pp$ раздѣли на p , выдѣтъ $6 = 4p$ слѣдов. $p = \frac{3}{2}$.

Отсюда $qq = -\frac{3}{2}$ и $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$, слѣдов. искомыя числа будутъ $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ и другое $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, какъ и прежде.



ГЛАВА IX.

О свойствахъ квадратныхъ уравнений.

690.

Изъ предполоказаннаго видно было, что каждое квадратное уравненіе двоякимъ образомъ рѣшиться можетъ, которое свойство заслуживаетъ особое примѣчаніе,

чаніе; ибо чрезъ то и вышнихъ степе-
ней уравненій не мало облегчаючися. Чего
ради разсмотримъ теперь, для чего ка-
ждое квадратное уравненіе двоякое рѣше-
ніе имѣетъ; поелику въ семъ важное
свойство сихъ уравненій заключается.

691.

Хотя уже извѣстно, что сіе двой-
ное рѣшеніе начало свое имѣетъ отъ-
да, что изъ каждаго числа квадратной
корень, какъ положительной, такъ и
отрицательной ваятію быть можетъ. Но
поелику причины сей при вышнихъ ура-
венніяхъ употребить не лзя, то не из-
лишно будещь, основаніе онаго показать
еще инымъ образомъ, то есть: здѣсь
изъяснить надобно, для чего квадратное
уравненіе, какъ наприм. $xx = 12x - 35$
двоющимъ образомъ рѣшимо быть можетъ,
или что для x двѣ величины опредѣлены
быть могутъ, изъ коихъ каждая рѣшитъ
данной вопросъ. Такъ въ семъ примѣрѣ
чѣсто x можно взять какъ 5, такъ и 7;

2 4

вбо

ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $xx = 12x - 35$.

692.

Для лучшаго изъясненія сего основанія, перенеси всѣ члены уравненія на одну сторону, такъ чтобъ на другой сторонѣ былъ 0; почему прежнее уравненіе перемѣнится въ $xx - 12x + 35 = 0$. Причемъ пребудетъ найти только такое число, которое если поставиши вмѣсто x , формула $xx - 12x + 35$ была бы дѣйствительно равна 0, а потомъ уже показывать должно причину, для чего сего двоякимъ образомъ учиниться можеть.

693.

Вся сила состоятъ въ томъ, что бы показать, что формула $xx - 12x + 35$ можетъ почтаться за произведеніе изъ двухъ множителей; какъ и дѣйствительно формула сѣ состоятъ изъ двухъ множителей $(x - 5)(x - 7)$; чего ради когда оная формула должна быть 0; то и произведеніе $(x - 5)(x - 7)$ должно быть тако-

накожде $= 0$; а произведение изъ сколь-
кихъ бы множилася оно ни состояло,
всегда будетъ 0, еслили только одинъ
множитель $= 0$; ибо сколько бы велико
произведение изъ прочихъ множителей
нибыло, когда оно на 0 помножится,
всегда выдетъ въ произведеніи 0; кото-
рую истинну и при вышшихъ уравненіяхъ
наблюдать надобно.

694.

Отсюда видно, что произведение
 $(x-5)(x-7)$ въ двухъ случаяхъ будетъ $= 0$:
первое, когда первой множитель $x-5 = 0$
будетъ, и второе, когда второй $x-7 = 0$;
первое учинится положивъ $x = 5$, а вто-
рое положивъ $x = 7$. Изъ сего видна под-
линная причина, для чего уравненіе
 $xx - 12x + 35 = 0$ двумя образами рѣ-
шиться можетъ, или для x двѣ величи-
ны опредѣлить можно, кои обѣ рѣшатъ
уравненіе. Она я причина состоятъ
въ томъ, что формула $xx - 12x + 35$
представлена быть можетъ, какъ произве-
деніе изъ двухъ множителей.

3 5

695.

695.

Сие обстоятельство имѣетъ мѣсто при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ ; ибо когда всѣ члены перенесутся на одну сторону , то всегда получится такая формула , $xx - ax + b = 0$, которая равнымъ образомъ почтена быть можетъ за произведеніе изъ двухъ множителей , кои мы изобразимъ такъ: $(x - p)(x - q)$, не имѣя нужды знать , что значить p и q ; и когда уравненіе наше требуетъ , чтобъ сие произведеніе было 0 , то извѣстно , что сие двоякимъ образомъ учинено быть можетъ : первое когда $x = p$, а второе когда $x = q$, что значить обѣ величины , по которымъ уравненіе разрѣшается.

696.

Посмотримъ какіе сии множители быть должны , что бы ихъ произведеніе точно нашу формулу $xx - ax + b$ дѣлало. Умножь ихъ самымъ дѣломъ , и получашся $xx - (p + q)x + pq$: что когда съ формулою $xx - ax + b$ тоже быть должно ,
то

то видно что $p+q$ должно быть равно a и $pq=b$, откуда познаемъ мы сіе знаменное свойство, что такого уравненія, какъ $xx-ax+b=0$ обѣ величины суть такого состоянія, что сумма ихъ равна числу a , а произведение $=b$, почему какъ скоро извѣстна будещъ одна величина, найдетъся и другая.

6;7.

Въ семъ случаѣ обѣ величины x имѣютъ знакъ положительной, и въ уравненіи второй членъ имѣетъ знакъ $-$, а третьей $+$. Разсмотримъ теперь и сіи случаи, когда одна или обѣ величины x знакъ отрицательной имѣютъ; первое учинится, когда оба множителя уравненія будутъ такіа $(x-p)(x+q)$, откуда производящъ для x двѣ величины $x=p$ и $x=-q$, и самое уравненіе будещъ $xx+(q-p)x-pq=0$, гдѣ второй членъ знакъ $+$ имѣетъ, то есть когда q больше нежели p , ежели же бы q менше было нежели p , то бы при второмъ членѣ

нѢ стоялъ знакъ $-$; прстей же членѢ имѢющѢ здѢсь всегда знакъ $-$.

А когда оба множителя будутѢ $(x+p)(x+q)$, то обѢ величины x будутѢ отрицательныя , т. е. $x = -p$, и $x = -q$; а самое уравненіе было бы $xx + (p+q)x + pq = 0$, гдѢ какѢ второй , такѢ и прстей члены знакѢ $+$ имѢющѢ.

698.

Отсюда познаемѢ мы состояніе корней каждаго уравненія по знакамѢ втораго и прстей членовѢ. ПустьѢ будетѢ уравненіе $xx - - - ax - - - b = 0$, когда второй и прстей члены имѢющѢ знакѢ $+$, то обѢ величины x будутѢ отрицательныя ; когда же второй членѢ знакѢ $-$, а прстей $+$ имѢющѢ , то обѢ величины будутѢ положительныя ; а ежели и прстей членѢ будетѢ имѢть знакѢ отрицательной , то одна величина будетѢ положительная , а другая отрицательная , и всегда второй членѢ содержи

житъ сумму обоихъ корней ; а третей ихъ произведение.

699.

Теперь не трудно здѣлать такое квадратное уравненіе, которое бы по изволснiю двѣ данныя величины содержало ; спрашивается напр. такое уравненіе, гдѣ одна величина x былабъ 7 , а другая -3 : здѣлай изъ сего простое уравненіе $x=7$ и $x=-3$, попомъ $x-7=0$ и $x+3=0$, которые суть множители пребуемаго уравненія , такъ что самое уравненіе естъ $xx-4x-21=0$, откуда по прежнему правилу тѣ же самыя величины для x найдутся ; ибо когда $xx=4x+21$, то будетъ $x=2 \pm \sqrt{25}$, или $x=2 \pm 5$, и такъ $x=7$ или $x=-3$.

700.

Спастся можетъ , что обѣ величины x будутъ равны между собою ; то есть , сыщи такое уравненіе , гдѣ обѣ величины $x=5$, слѣдъ оба множителя будутъ $(x-5)(x-5)$, и уравненіе $xx-10x+25=0$, которое одну величину для x имѣетъ ;

156 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХ.

имѣетъ; ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $x=5$, что покажетъ обыкновенное рѣшеніе такого уравненія. Когда $xx=10x-25$, то будетъ $x=5 \pm \sqrt{0}$, или $x=5 \pm 0$, слѣд. $x=5$ и $x=5$.

701.

Особливо здѣсь примѣчать надлежитъ, что иногда оба знаменованія x будутъ мнимые или невозможные, въ которыхъ случаяхъ совсѣмъ означить не можно такой величины для x , которая бы данной вопросъ рѣшила. Напр. ежели число 10 должно будетъ раздѣлится на двѣ части, коихъ бы произведение было 30, то пусть будетъ одна часть $4x$, другая $=10-x$, а слѣд. ихъ произведение $10x-xx=30$, то есть, $xx=10x-30$ и $x=5 \pm \sqrt{-5}$, которое есть мнимое или невозможное число, и дастъ знать, что заданной вопросъ невозможенъ.

702.

И такъ не опмѣнно нужно здѣсь найти знакъ, какъ косто бы узнать можно

жно было, возможно ли квадратное уравненіе или нѣтъ. На сей конецъ пусть будетъ дано сіе общее уравненіе:

$xx - ax + b = 0$, или еснѣ $xx - ax = -b$, и $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b}$, откуда явствуетъ, что когда число b больше нежели $\frac{1}{4}aa$, или $4b$ больше нежели aa , то обѣ величины будутъ не возможны: ибо тогда должно бы извлекать квадратной корень изъ отрицательнаго числа; но когда b меншее нежели $\frac{1}{4}aa$, или еще менше 0, то естѣ отрицательное, то обѣ величины x будучи всегда возможны; и хотя бы они были возможны или нѣтъ, то всегда можно ихъ изъяснить по сему способу: притомъ имѣютъ они всегда сіе свойство, что сумма ихъ равна a , а произведеніе $= b$, какъ въ семъ примѣрѣ видно $xx - bx + 10 = 0$, гдѣ сумма обѣихъ знаменованій x должно быть b , а произведеніе $= 10$. Обѣ величины будутъ: I) $x = 3 + \sqrt{-1}$; II) $x = 3 - \sqrt{-1}$, коихъ сумма $= 6$, а произведеніе $= 10$.

Сей характеръ можно изъяснить во
 обще , припомъ можетъ быть онъ упо-
 требленъ и въ такихъ уравненіяхъ какъ
 $fx^2 + gx + b = 0$; ибо отсюда получится
 $xx = -\frac{gx+b}{f}$, и $x = -\frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg-b}{4f^2}\right)}$
 или $x = -\frac{g}{2f} \pm \sqrt{gg-4fb}$; откуда вид-

но, что обѣ величины для x могутъ быть
 мнимыя , или уравненіе не возможно ,
 когда $4fb$ будетъ больше нежели gg , или
 когда въ семъ уравненіи $fx^2 + xgx + b = 0$
 учтверренное произведеніе изъ первого
 и послѣдняго члена будетъ больше ,
 нежели квадратъ втораго члена ; ибо че-
 твернное произведеніе изъ первого и пос-
 лѣдняго членовъ есть $4fbxx$, квадратъ
 средняго члена есть $ggxx$, и когда $4fbxx$,
 больше нежели $ggxx$, то будетъ также
 $4fb$ больше нежели gg , слѣд. и уравненіе
 не возможно. Во всѣхъ другихъ случа-
 яхъ уравненіе возможно , и обѣ величи-
 ны для x действительно опредѣлимы
 можно,

можно, хотя оныя часто бываютъ и невозможны, однако въ тѣхъ случаяхъ къ истинной величинѣ всегда приблизиться можно, какъ ужъ выше его упомянушо. Напротивъ того въ мнимыхъ выраженіяхъ какъ $V-\zeta$ ни какое приближеніе мѣста не имѣетъ, ибо тогда и 100 отъ него столько же далеко отстоитъ какъ 1, или другое какое число.

704

При семъ еще примѣчать надлежитъ, что каждая такая формула второй степени какъ $xx + ax + b$ непремѣнно раздѣлится можетъ на два такіе множителя, какъ $(x + p)(x + q)$. ибо ежели бы кто хотѣлъ взять 3 такихъ множителя, то нашелъ бы уравненіе третьей степени, на противъ того изъ одного такого множителя не дошелъ бы и до второй степени; по чему безспорно должно быть справедливо, что каждое уравненіе второй степени содержитъ въ себѣ двѣ величины для x , и что такихъ

Томъ II.

И

вели-

величинъ въ немъ ни больше, ни меньше быть не можетъ.

• 705.

Уже показано было, что когда оба сѣи множителя найдутся, по оппуда и обѣ величины для x опредѣлить можно будетъ; ибо каждаго множителя положивъ равна 0, найдется величина x . Сіе имѣетъ мѣсто и въ оборотномъ смыслѣ, то есть, какъ скоро одна величина x опредѣлена будетъ, познается оппуда и множитель квадратнаго уравненія; ибо когда $x = p$ есть одна величина для x въ квадратномъ уравненіи, то будетъ та-кожде $x - p$ одинъ множитель онаго, или когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, уравненіе раздѣлится можетъ на $x - p$, и частное дастъ другаго множителя.

706.

Для извѣщенія сего пусть будетъ данное уравненіе $xx + 4x - 21 = 0$, о которомъ мы знаемъ, что $x = 3$ есть величина

личина количества x , ибо $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$, а отсюда заключить можемъ, что $x - 3$ есть множитель сего уравненія, или что $xx + 4x - 21$ раздѣлится можетъ на $x - 3$, какъ изъ слѣдующаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r}
 x-3 \overline{)xx+4x-21} \quad x+7 \\
 \underline{xx-3x} \\
 +7x-21 \\
 \underline{+7x-21} \\
 0
 \end{array}$$

И такъ другой множитель есть $x + 7$, и уравненіе наше можетъ изъявлено быть симъ произведеніемъ $(x - 3)(x + 7) = 0$, откуда обѣ величины количества x ясно видѣть можно; ибо изъ перваго множителя будетъ $-x = 3$, а изъ другаго $x = -7$.

ГЛАВА X.

О разрѣшеніи чистыхъ кубическихъ уравненій.

707.

Чистое кубическое уравненіе называется, въ которомъ кубъ неизвѣстнаго количества полагается равенъ извѣстному числу, такъ что въ немъ ни квадратовъ неизвѣстнаго числа, ни оно само не попадается.

Такое уравненіе есть $x^3 = 125$, или вообще $x^3 = a$, или $x^3 = \frac{a}{b}$.

708.

Какимъ образомъ изъ такого уравненія величина x находится, явно само по себѣ: ибо нужно только съ обѣихъ сторонъ извлечь кубичной корень.

Такъ изъ уравненія $x^3 = 125$ найдется $x = 5$, изъ уравненія $x^3 = a$ будетъ $x = \sqrt[3]{a}$; а изъ $x^3 = \frac{a}{b}$ найдется $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. И такъ еслили кто знаетъ, какъ извлекать

всклается кубичной корень изъ какого нибудь числа, тогда можеть разрѣшить и такое уравненіе.

709.

Но симъ образомъ получится одна только величина x , между тѣмъ когда каждое квадратное уравненіе имѣеть двѣ величины для x , по можно думать, что также и кубичное уравненіе должно имѣть больше нежели одну величину; слѣд. не безнужно будетъ разсмотрѣть сіе обстоятельство, и въ случаѣ, естли такое уравненіе больше одной величины для x имѣть должно, какъ ихъ сыскать надлежитъ.

710.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе $x^3 = 8$, изъ коего всѣ числа найши должно, коихъ кубъ $= 8$, и послѣку безъ всякаго сомнѣнія такое число $x = 2$, то по прежней главѣ $x^3 - 8 = 0$ должно дѣлиться на $x - 2$, чего ради дѣлаетъ сіе дѣленіе:

И 3

 $x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3-8 \mid x^2+2x-4} \\
 \underline{x^3-2x^2} \\
 +2x^2-8 \\
 \underline{+2x^2-4x} \\
 +4x-8 \\
 \underline{+4x-8}
 \end{array}$$

Слѣдовательно уравненіе наше $x^3-8=0$ развѣивать можно множителем $(x-2)$ $(xx+2x+4)=0$.

711.

Понеже здѣсь спрашивается, какое бы число взявъ подлежало мѣсто x , чтобъ $x^3=8$ или $x^3-8=0$ было, то видно, что сіе учинится, когда въ прежнемъ пунктѣ найденное произведеніе положится 0; припомъ оно не только тогда будетъ 0, когда $x-2=0$; откуда получится $x=2$; но также и тогда, какъ другой множитель $xx+2x+4$ будетъ 0: чего ради положи ево $=0$, то есть $xx+2x+4=0$, то будетъ $xx=-2x-4$ и слѣд. $x=-1 \pm \sqrt{-3}$.

712.

И такъ сверхъ $x=2$, въ кото-
ромъ случаѣ уравненіе $x^3=8$ разрѣшастъ
ся, имѣемъ мы еще двѣ другія величины
для x , коихъ кубы равнымъ образомъ
дѣлаютъ 8, и которые суть такого со-
стоянія 1) $x=-1+\sqrt{-3}$; II) $x=-1$
 $-\sqrt{-3}$, а взявъ ихъ кубы сомнѣніе на-
ше кончится.

$ \begin{array}{r} -1 - \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 1 - \sqrt{-3} \\ - \sqrt{-3} - 3 \\ \hline -2 - 2\sqrt{-3} \quad \text{квадратъ} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 2 + 2\sqrt{-3} \\ - 2\sqrt{-3} - 2 \cdot -3 \\ \hline 2 + 6 = 8 \quad \text{кубъ.} \end{array} $	$ \begin{array}{r} -1 - \sqrt{-3} \\ -1 - \sqrt{-3} \\ \hline 1 + \sqrt{-3} \\ + \sqrt{-3} - 3 \\ \hline -2 + 2\sqrt{-3} \\ -1 - \sqrt{-3} \\ \hline 2 - 2\sqrt{-3} \\ + 2\sqrt{-3} - 2 \cdot -3 \\ \hline 2 + 6 = 8. \end{array} $
---	---

Объ сія величины суть хотя и невозмо-
жные или мнимыя; однако не смотря на
то примѣчанія достойны.

Сие имѣетъ мѣсто въ каждомъ пакѣ кубическомъ уравненіи, какъ $x^3 = a$, гдѣ сверхъ $x = \sqrt[3]{a}$ еще двѣ другія величины содержатся; положи для краткости $\sqrt[3]{a} = c$, такъ что $a = c^3$, и уравненіе наше получитъ сію формулу $x^3 = c^3$, или $x^3 - c^3 = 0$, которое послѣднее дѣлится на $x - c$, какъ изъ предложеннаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r}
 x \quad c \mid x^3 - c^3 \quad x^2 + cx + c^2 \\
 \underline{x^3 - cx^2} \\
 + cx^2 - c^3 \\
 \underline{+ cx^2 - c^2x} \\
 + c^2x - c^3 \\
 \underline{+ c^2x - c^2} \\
 0
 \end{array}$$

По чему предписанное уравненіе изъясняется можетъ симъ произведеніемъ $(x - c)(x^2 + cx + c^2) = 0$, что въ самомъ дѣлѣ будетъ равно 0, не только тогда, когда $x - c = 0$, или $x = c$, но также и когда $xx + cx + c^2 = 0$, а изъ сего будетъ $xx = -cx - c^2$; и слѣд. $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - c^2\right)}$

$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2} = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = (-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2})c$. с. въ сей формулѣ содержася еще двѣ величины для x .

714.

Понже c вмѣсто $\sqrt[3]{a}$ написано было, по отсюда выводимъ мы слѣдствие: что въ каждой кубичной формулѣ какъ $x^3 = a$ три величины для x содержася, которые извѣвляющяся такъ:

I) $x = \sqrt[3]{a}$, II) $x = (-\frac{1 + \sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{a}$; III) $x = (-\frac{1 - \sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{a}$.

Откуда явствуетъ, что каждой кубичной корень три величины имѣетъ, изъ коихъ хотя первая только возможна, прочіе же двѣ не возможны, которые однако здѣсь примѣчать надлежитъ, для того что мы выше сего видѣли, что каждой квадратной корень двѣ величины имѣетъ; а въ слѣдующихъ покажется, что каждой корень четвертой степени имѣетъ 4 разныя величины, пятой пять и такъ далѣе.

Въ простыхъ выкладкахъ употребляется только первой изъ сихъ трехъ вели-

И 5

чинъ

чинъ . потому что оба другіе не возможны ; чему намѣрены мы еще дать здѣсь нѣсколько примѣровъ.

715.

Вопросъ. Сыскать число , котораго квадратъ ежели умножится на $\frac{1}{4}$ числа искомаго , произошло бы 432 ?

Пусть сѣ число будетъ x , то xx умноженное на $\frac{1}{4}x$ должно быть равно числу 432 ; слѣдов. будетъ

$\frac{1}{4}x^3 = 432$, умноживъ на 4, будетъ $x^3 = 1728$, и извлеки кубичной корень найдется $x = 12$

Отвѣтъ. Искомое число есть 12: ибо квадратъ его 144 умноженной на $\frac{1}{4}$ ш. е. на 3 даетъ 432.

716.

Вопросъ. Сыскать число , коего бы четвертая степень раздѣленная на его половину , и къ сему частному ещя придастся $14\frac{1}{4}$ чпобъ вышло 100 ?

Искомое число положи x , то четвертая его степень x^4 раздѣленная на $\frac{1}{2}x$ даетъ $2x^3$; къ сему придавъ $14\frac{1}{4}$ должно

жно выпиши 100 , и такъ будетъ $2x^2 - 14\frac{1}{2} = 100$, выпиши $14\frac{1}{2}$, выдѣтъ $2x^2 = \frac{213}{2}$, раздѣли на 2 , выдѣтъ $x^2 = \frac{213}{4}$, и извлеки кубичной корень получится $x = \sqrt{\frac{213}{4}}$

717.

Вопросъ. Нѣсколько офицеровъ стоятъ въ полѣ , каждой въ командѣ своей имѣетъ въ прое столько конницы , и въ 20 разъ столько пѣхоты , нежели сколько всѣхъ офицеровъ въ полѣ находится ; каждой конной получаетъ въ мѣсяцъ столько гулденовъ жалованья , сколько всѣхъ офицеровъ ; а каждой пѣшей въ половину столько , вся же въ мѣсяцахъ выдаваемая на жалованье сумма денегъ дѣлаетъ 13000 гулден. спрашивается сколько всѣхъ офицеровъ было ?

Положи число офицеровъ x , то каждой въ командѣ своей имѣетъ $3x$ конницы и $20x$ пѣхоты , слѣд. число всѣхъ конныхъ было $3xx$, а пѣшихъ $20xx$; и когда каждой конной въ мѣсяцъ получаетъ x гулденовъ , и каждой пѣшей $\frac{1}{2}x$ гулд.

гулд. ию мѣсячное жалованіе всѣхъ конныхъ будетъ $3x^2$ гулденовъ , а пѣхопы $10x^2$ гулд. и всѣ вообще получаютъ снѣ $13x^2$ гулденовъ , что должно быть равно числу 13000 гулд.

И такъ когда $13x^2 = 13000$, то будетъ $x^2 = 1000$ и $x = 10$. Столько было офицеровъ.

718.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ здѣлали компанію. Положивъ каждой въ 100 разъ больше , нежели ихъ число компанію составляющее , съ сего суммою посылаютъ они фактора въ Венецію . которой на каждые 100 флореновъ выграітъ въ двое больше , нежели число ихъ ; а возвратившись назадъ привезъ барыша 2662 флор. спрашивается сколько купцовъ было ?

Пусть будетъ x число купцовъ , то каждой изъ нихъ положилъ $100x$ флор. и весь капиталъ былъ $100xx$ флор; и когда на каждыя 100 флор. получено барыша $2x$ флор. , то весь выигрышъ

рышѣ былъ $2x^2$ флор., что должно быть равно 2662 флор. слѣд. $2x^2 = 2662$ и $x^2 = 1331$, откуда $x = 11$. Столько было купцовъ.

719.

Вопросѣ. Одна крестьянка промѣниваетъ сырѣ на курицѣ, давая 2 сыра за каждыя 3 курицы: куры несущѣ яйца, каждая $\frac{1}{2}$ противу числа всѣхъ курѣ. Съ этими яйцами пошла она на рынокѣ, и продаетъ каждыя 9 яицѣ за столько пфениговѣ сколько курица снесла яицѣ, а выручила всѣхъ денегѣ 72 пфенинга; спрашивается сколько сыровѣ у нее было?

Положи число сыровѣ было x , что промѣняла она ихѣ за $\frac{1}{2}x$ курицы, когда каждая курица кладетъ $\frac{1}{2}x$ яицѣ, то число всѣхъ яицѣ было $\frac{1}{2}xx$: теперь продаетъ она каждыя 9 яицѣ за $\frac{1}{2}x$ пфениговѣ; слѣд. всего навсе выручила она $\frac{1}{4}x^2$ пфен., что 72 равно быть долженствуетъ. И такѣ $\frac{1}{4}x^2 = 72$, и $x^2 = 72 \cdot 4 = 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, почему $x = 12$. Столько сыровѣ у крестьянки было, кои она промѣняла за 18 курицѣ.

ГЛАВА

ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи полныхъ кубическихъ уравненій.

720.

Полное кубическое уравненіе называется, въ которомъ сверхъ куба неизвѣстнаго числа, еще его квадратъ и самое неизвѣстное число находятся. Общая формула такого уравненія есть $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то есть когда всѣ члены перенесутся на одну сторону. А какимъ образомъ изъ такого уравненія величины x находятся, которые также и корни уравненія именуются, показано будетъ въ сей главѣ; ибо здѣсь можно уже знать напередъ, что такое уравненіе всегда 3 корни имѣетъ, по причинѣ въ прежней главѣ о чистыхъ уравненіяхъ сего степеня показанной.

721.

Съ самаго начала рассмотримъ сие уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; когда
квадратъ;

квадратное уравненіе почтается за произведеніе изъ двухъ множителей, то сіе кубическое можно почестъ за произведеніе изъ трехъ множителей, которые въ семъ случаѣ будутъ:

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$, кои умножены будучи между собою производятъ преж-
нее уравненіе; ибо $(x-1)(x-2)=xx-3x-+2$, и сіе умножа еще на $(x-3)$, въ произведеніи дастъ $x^3-6xx-+11x-6$ прежнее заданное уравненіе, которое равно 0 быть должно; что учинится когда произведеніе $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ будетъ; а сіе адѣляется ежели только одинъ изъ 3хъ множителей будетъ 0; и слѣд. въ трехъ случаяхъ; первое, когда $x-1=0$, или $x=1$, второе, когда $x-2=0$, или $x=2$, третье, когда $x-3=0$, или $x=3$. Сверхъ сего видно, что какое бы другое число мѣсто x положено ни было, ни одинъ изъ сихъ трехъ множителей не будетъ 0, слѣд. также и произведеніе; откуда видно, что
уравне-

уравненіе наше никакихъ другихъ корней не имѣетъ кромѣ сихъ трехъ.

722.

Если бы можно было къ каждому другому случаю опредѣлить сихъ трехъ множителей уравненія, то бы изъ ихъ нашлись тотчасъ при корня онаго. На сей конецъ рассмотримъ мы три такіе множителя вообще, кои пусть будутъ $x - p$, $x - q$, $x - r$: найди ихъ произведеніе, и поелику первой умноженной на второго даетъ $xx - (p + q)x + pq$, то сіе произведеніе умноженное на $x - r$ произведетъ слѣдующую формулу:

$x^3 - (p + q + r)xx + (pq + pr + qr)x - pqr$, которая если должна быть 0, то сіе учинится только въ трехъ случаяхъ: I) $x - p = 0$ или $x = p$, II) $x - q = 0$, или $x = q$; III) $x - r = 0$ или $x = r$.

723.

Пусть сіе уравненіе теперь изобразится такъ: $x^3 - axx + bx - c = 0$, и съемъ корни

корни онаго будуща I) $x=p$, II) $x=q$; III) $x=r$, то должно быть $a=p+q+r$, 2) $b=pq+pr+qr$; и 3) $c=pqr$, откуда видно, что второй членъ содержитъ сумму всѣхъ трехъ корней, третий членъ сумму произведений каждаго двухъ корней помноженныхъ между собою, и послѣдней членъ произведение всѣхъ трехъ корней умноженныхъ между собою. Сие послѣднее свойство показываетъ намъ, что кубическое уравненіе подлинно никакого другаго рациональнаго корня имѣть не можетъ, какъ только того, на котораго послѣдней членъ дѣлится; ибо когда онъ есть произведение изъ всѣхъ трехъ корней, то долженъ онъ непремѣнно дѣлиться на каждаго изъ нихъ. И такъ тотчасъ узнать можно, какими числами помянутое дѣленіе пробовать должно, ежели пожелаешь узнать одинъ только корень.

Для изъясненія сего рассмотримъ мы уравненіе $x^3=x+6$ или $x^3-x-6=0$, когда оно никакого другаго рациональ-

Толѣ II.

I

наго

наго корня не имѣетъ, кромѣ того, на копорой послѣдней членъ б дѣлится, по пробу чинимъ надлѣжитъ съ сими только числами 1, 2, 3, 6

которыя пробы сполнѣ въ такомъ порядкѣ

$$\text{I) когда } x=1, \text{ то будетъ } 1-1-6=-6$$

$$\text{II) когда } x=2, \text{ то будетъ } 8-2-6=0$$

$$\text{III) когда } x=3, \text{ то будетъ } 27-3-6=18$$

$$\text{IV) когда } x=6, \text{ то будетъ } 216-6-6=204$$

Отсюда усматриваемъ мы, что $x=2$ есть корень предложеннаго уравненія, изъ коего уже оба другіе легко найти можно; ибо когда $x=2$ есть корень, то $x-2$ будетъ множитель уравненія; чего ради надлѣжитъ только сыскать другаго множителя, что учинится слѣдующимъ дѣленіемъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \left| \begin{array}{r} x^2-x-6 \\ x^2-2x^3 \end{array} \right| x^2+2x+3 \\
 \hline
 2x^3-4x^2 \\
 \hline
 2x^3-4x^2 \\
 \hline
 +3x-6 \\
 \hline
 +3x-6 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Понеже формула наша изъяснена быть можеть симъ произведеніемъ $(x-2)$ (x^2+2x+3) , то оная будетъ 0, не-только когда $x-2=0$; но и когда $xx+2x+3=0$, а отсюда имѣемъ мы $xx=-2x-3$, то есть $x=-1 \pm \sqrt{-2}$ оба другіе корня нашего уравненія, кои какъ видно суть не возможные, или мнимыя.

724.

Но сіе имѣетъ тогда только мѣсто, когда первой членъ уравненія x^2 на 1, а прочіе члены на цѣлыя числа помножены; естли же въ данномъ уравненіи случатся дроби, то имѣемъ мы средство превращать сіе уравненіе въ другое, въ коемъ дробей не находится,

и тогда проба учинена съ нимъ быть можеть какъ и прежде.

Пусть будетъ дано уравненіе $x^2 - 3x + \frac{11}{4}x - \frac{1}{2} = 0$, понеже здѣсь четвертии на-
ходятся, то положи $x = \frac{y}{2}$, и получится $\frac{y^2}{4} - \frac{3y}{2} + \frac{11y}{4} - \frac{1}{2} = 0$, что помноживъ
на 8 будетъ $y^2 - 6yy + 11y - 6 = 0$, косто
корни суть, какъ мы прежде уже видѣли
 $y = 1, y = 2, y = 3$; слѣд. въ нашемъ
уравненіи I) $x = \frac{1}{2}$; II) $x = \frac{1}{2}$; III) $x = \frac{3}{2}$.

725.

Когда первой членъ въ уравненіи
умноженъ будетъ на какое нибудь число,
а послѣдней будетъ 1, какъ въ семъ
уравненіи $6x^2 - 11x + 6x - 1 = 0$, откуда
чрезъ дѣленіе на 6 произойдетъ
 $x^2 - \frac{11}{6}x + x - \frac{1}{6} = 0$, которое по прежнему
правилу отъ дробей освобождается, поло-
живъ $x = \frac{y}{6}$; ибо тогда выдетъ $\frac{y^2}{36} - \frac{11y}{36} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, что умноживъ на 36 выдетъ
 $y^2 - 11yy + 6y - 36 = 0$; но здѣсь пруд-
но бы было дѣлать пробу со всѣми дѣ-
лителями числа 36, а понеже въ первомъ
ура-

уравненіи послѣдней членъ $= 1$, то положи $x = \frac{1}{z}$ и будетъ $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, число умноживъ на z^3 произойдетъ $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ и перенеся всѣ члены на другую сторону будетъ $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$, коего корни суть $z = 1 = 2 = 3$; слѣд. въ нашемъ уравненіи будетъ $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

726.

Изъ вышепоказаннаго явствуетъ, что, когда всѣ корни будутъ положительныя, знаки $+$ и $-$ въ уравненіи переменяются, и тогда имѣетъ оно такой видъ $x^3 - axx + bx - c = 0$, гдѣ при переменѣ знаковъ находясь, то есть, столько же сколько оно имѣетъ положительныхъ корней. Если же бы были всѣ три корня отрицательныя, и помножены были между собою сіи три множителя $x + p$, $x + q$, $x + r$, то при всѣхъ бы членахъ находился знакъ $+$; а уравненіе такую бы формулу имѣло $x^3 + axx + bx + c = 0$, гдѣ 3 раза 2 одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ, то есть

I ;

столь-

столько же , сколько уравненіе имѣетъ отрицательныхъ корней.

Изъ сего выведено сіе слѣдствіе , сколь часто въ уравненіи знаки перемѣняются , столько положительныхъ корней оно имѣетъ , и сколь часто одинакіе знаки другъ за другомъ слѣдуютъ , столько оно отрицательныхъ корней имѣетъ . Сіе примѣчаніе здѣсь весьма важно , дабы познать , положительныя или отрицательныя дѣлители послѣдняго члена , съ которыми проба дѣлается , брать должно.

727.

Для изъясненія сего рассмотримъ сіе уравненіе :

$x^5 + xx - 34x + 56 = 0$, въ которомъ двѣ перемѣны знаковъ , и одно только слѣдствіе того же знака находится , откуда мы заключаемъ , что сіе уравненіе имѣетъ два положительныхъ , и одинъ отрицательный корень , кои должны быть дѣлители послѣдняго члена 56 , и
слѣд.

слѣд. содержатся между числами $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Если положится $x=2$, то будетъ $8+4-68+56=0$, откуда видимъ, что $x=2$ есть корень положительной, и слѣд. $x-2$ дѣлитель нашего уравненія, откуда оба прочихъ корня легко найти можно, если только уравненіе раздѣлится на $x-2$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) \begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 68x + 56 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} } \begin{array}{l} x^2 + 3x - 28 \\ 3x^2 - 34x \\ 3x^2 - 6x \\ \hline -28x + 56 \\ -28x + 56 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

И такъ сіе частное $x^2+3x-28=0$ положивъ, найдутся отсюда оба другіе корня, кои будутъ $x=-\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, слѣд. оба послѣдніе корня будутъ $x=4$ и $x=-7$, къ чему еще надлежитъ взять прежней $x=2$.

Отсюда явствуетъ, что въ заданномъ уравненіи дѣйствительно два положительных и одинъ отрицательной корни содержатся, что слѣдующими примѣрами изъяснить мы намѣрены.

728.

Вопросъ. Сыскать два числа, коихъ разность 12, и если произведеніе ихъ помножится на ихъ сумму, тобъ вышло 14560.

Положивъ меньшее число x , большее будетъ $x+12$, произведеніе ихъ $xx+12x$, которое умножено будучи на $2x+12$ дастъ $2x^2+36xx+144x=14560$, раздѣливъ на 2, будетъ $x^2+18xx+72x=7280$.

Понеже послѣдней членъ 7280 такъ великъ, что пробы съ нимъ мы учинить не можемъ, но видя что онъ дѣлится на 8, положи $x=2y$ и выдетъ $8y^2+72yy+144y=7280$; сіе уравненіе раздѣливъ на 8 выдетъ $y^2+9y+18y=910$, и теперь можно учинить пробу съ дѣлится
лями

лями числа 910, которые суть 1, 2, 5, 7, 10, 13 и проч. числа 1, 2, 5 суть дѣйствительно малы, для того возмем $y=7$ и получимся $343+441+126$ точно $=910$, слѣд. одинъ корень $y=7$ и $x=14$, а еслии кѣю хотимъ знать и оба прочіе корня, то раздѣли $y^3+9y^2+18y-910$ на $y-7$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 y-7 \overline{) y^3+9y^2+18y-910} \quad | \quad y^2+16y+130 \\
 \underline{y^3-7y^2} \\
 +16y^2+18y \\
 \underline{+16y^2-112y} \\
 130y-910 \\
 \underline{130y-910} \\
 0
 \end{array}$$

Если положимся сіе частное $y^2+16y+130=0$, то будетъ $yy=-16y-130$, откуда $y=-8 \pm \sqrt{-66}$, то естъ оба прочіе корня суть невозможны.

Оспвѣтъ. Оба искомые числа будутъ 14 и 26, коихъ произведеніе 364 умноженное на ихъ сумму 40 даетъ 14560.

Вопросъ. Найти два числа , коихъ разность 18 и разность ихъ кубовъ умноженная на сумму чиселъ производитъ число 275184 ?

Меншее число пусть будетъ x , а большее $x+18$, кубъ меньшаго x^3 , большего $x^3+54xx+972x+5832$ разность ихъ $= 54xx+972x+5832 = 54(xx+18x+108)$ которая умножена будучи на сумму чиселъ $2x+18 = 2(x+9)$ въ произведеніи дастъ $108(x^2+27xx+270x+972) = 275184$, раздѣли на 108 получится $x^2+27xx+270x+972 = 2548$, или $x^2+27xx+270x=1576$. Дѣлители числа 1576 суть 1, 2, 4, 8 и проч. изъ коихъ 1 и 2 малы, когда же положится 4 мѣсто x , то уравненіе разрѣшится, а для снисканія обѣихъ прочихъ корней должно уравненіе раздѣлить на $x-4$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-4 \overline{) x^3 + 27xx + 270x - 1576} \overline{) x^3 + 31x + 394} \\
 \underline{x^3 - 4xx} \\
 31xx + 270x \\
 \underline{31xx - 124} \\
 394x - 1576 \\
 \underline{394x - 1576} \\
 0
 \end{array}$$

Изъ сего частнаго получится $xx = -31x - 394$, а отсюда $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$, которые оба суть невозможны.

Отвѣтъ. Искомыя числа суть 4 и 22.

730.

Вопросъ. Найди два числа, коихъ разность 720, и если квадратной корень изъ большаго числа умножится на меньшее, то бы вышло 20736?

Меньшее число пусть будетъ x , а большее $x+720$ и $x\sqrt{x+720} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81$; возьми теперь съ обѣихъ сторонъ квадраты, то будетъ $x^2(x+720) = x^3 + 720xx = 8^3 \cdot 8^3 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, положи $x = 8y$, то выйдетъ $8^3 y^3 + 8^3 \cdot 720 \cdot y = 8^3 \cdot 8^3 \cdot 4^2 \cdot 81^2$

$4^2, 81^2$, раздѣли на 8^2 , будетъ $y^2 + 90y^2 = 8.4^2, 81^2$, положи $y = 2z$, выдетъ $8z^2 + 4.90zz = 8.4^2, 81^2$, раздѣли на 8, будетъ $z^2 + 45zz = 4^2, 81^2$; положи $z = 9u$, выдетъ $9^2u^2 + 45.9^2uu = 4^2, 9^2$

раздѣли на 9^2 будетъ $u^2 + 5uu = 4^2, 9$ или $uu' + 5) = 16. 9 = 144$. Здѣсь видно, что $u = 4$; ибо тогда $uu = 16$, и $u + 5 = 9$, откуда $z = 36$, $y = 72$, и $x = 576$, которое есть меншее число, большее же $= 1296$, коего квадратной корень 36 умноженной на 576 дастъ число 20736.

731.

Примѣчаніе. Сей вопросъ способѣ разрѣшиться можетъ симъ образомъ. Понже большее число должно быть квадратъ, въ противномъ случаѣ корень его умноженной на меншее число не произвелъ бы заданнаго числа.

Пусть будетъ большее число xx , а меншее $xx = 720$, которое на квадратной корень большаго числа, т. е. на x умно-

умноженное дастъ $x^3 - 720x = 20736 = 64 \cdot 27 \cdot 12$, положи $x = 4y$, то будетъ $64y^3 - 720y = 27 \cdot 12$, раздѣли на 64, выдетъ $y^3 - 45y = 27 \cdot 12$, положи еще $y = 3z$, и будетъ $27z^3 - 135z = 27 \cdot 12$, раздѣли на 27, выдетъ $z^3 - 5z = 12$, или $z^3 - 5z - 12 = 0$. Дѣлители 12 при сущъ 1, 2, 3, 4, 6, 12, изъ коихъ 1 и 2 очень малы, а когда положится $z = 3$, то выдетъ $27 - 15 - 12 = 0$, слѣд. $z = 3$, $y = 9$ и $x = 36$, и такъ большее число $xx = 1296$, а меньшее $xx - 720 = 576$, какъ и прежде.

732.

Вопросъ. Найди два числа, которыхъ разность $= 12$, и когда разность сія помножится на сумму ихъ кубовъ, тобъ вышло 102144?

Положивъ меньшее число x , большее будетъ $x + 12$, кубъ перваго $= x^3$, а другаго $x^3 + 36xx + 432x + 1728$, сумма ихъ умноженная на 12 дастъ 12 $(2x^3 + 36xx + 432x + 1728) = 102144$, раздѣли на 12, выдетъ $2x^3 + 36xx + 432x$

$+432x + 1728 = 8512$ раздели на 2 вы-
детъ $x^2 + 18xx + 216x + 864 = 4256$,

или $x^2 + 18xx + 216x = 3392 = 8.8.$

53. Положи $x = 2y$ и раздели на 8,
будетъ, $y^2 + 9yy + 54y = 8.53 = 424$. Дѣ-
лители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8,
53 и протч. изъ коихъ 1 и 2 очень
малы, если же положится $y = 4$, то
будетъ $64 + 144 + 216 = 424$, слѣд. $y = 4$
и $x = 8$, по чему оба искомыя числа суть
8 и 20.

733.

Вопросъ. Въ нѣкоторой купеческой
компаніи кладетъ каждой въ 10 разъ
столько флореновъ, сколько людей въ
компаніи; получаютъ на каждые 100
флор. барыша 6 флор. больше, нежели
ихъ число, на послѣдокъ нашлось, что
весь барышъ былъ 392 флор. спрашивается
сколько товарищей было?

Положи число товарищей было x ,
то каждой въ компанію положилъ 10х
флореновъ, а всѣ вмѣстѣ положили 10хх
флор.; на каждые 100 флореновъ изъ
сей

сей суммы выигрываютъ они 6 флореновъ больше , нежели сколько ихъ въ компаніи находится ; слѣд. на 100 флор. получаютъ барыша $x+6$ флор. и на весь ихъ капиталъ получаютъ они $\frac{x^2+6xx}{100}=392$

Умножь на 10, и выдесть $x^2+6xx=3920$, положи $x=2y$, то получится $8y^2+24yy=3920$ раздѣливъ на 8 выдесть $y^2+3yy=490$. Дѣлилки послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и проч. изъ коихъ 1, 2 и 5 очень малы, когда же положится $y=7$, то выдесть $343+147=490$, слѣд. $y=7$ и $x=14$.

Отвѣтъ. Число товарищей было 14, и каждой положилъ 140 флореновъ.

734.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ имѣютъ вмѣстѣ капиталъ изъ 8240 палеровъ состоящей, въ которую сумму каждой положилъ еще въ 40 разъ больше палеровъ, нежели число товарищей; всю сумму выигрываютъ они столько процен-

процентовъ сколько товарищей было : попомъ раздѣливъ сей выигрышъ взявъ каждой 10 разъ столько талеровъ, сколь велико ихъ число было, и наконецъ осталось еще 224 талера, спрашивается сколько всѣхъ купцовъ было ?

Положи число ихъ $=x$, то каждой изъ нихъ кладетъ 40х талеровъ къ общему капиталу 8240 тал. слѣд. всѣ вмѣстѣ положатъ 40хх талер. ; по чему вся сумма была 40хх + 8240, которою выигрываютъ они на каждыя 100 талер. $\frac{x}{100}$ талер. слѣд. весь выигрышъ будетъ $\frac{40x^2}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4x^2}{10} + \frac{412x}{5}$; изъ сего числа беретъ каждой 10х талер слѣд. всѣ вмѣстѣ возмуть 10хх талер. и останется еще 224 талер., откуда явствуется что весь выигрышъ былъ 10хх + 224 ; чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{4x^2}{10} - 10хх + 224$, которое раздѣливъ на 2 и помноживъ на 5 выстѣ $x^2 + 206x = 25хх + 560$ или $x^2 - 25хх + 206х - 560 = 0$. Чтожъ касается до пробы , то первая формула гораздо къ тому способнѣе.

Понже

Понеже дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, и пр., которые должны быть положительныхъ числа, потому, что въ послѣднемъ уравненіи находится 3 переменныя знаковъ; а опшуда заключить можно что всѣ три корня должны быть положительные.

Ежели проба учинится съ числами $x=1$ и $x=2$, то явно, что первая часть будетъ гораздо меньше, нежели вторая: чего ради станемъ пробовать слѣдующія числа:

когда $x=4$, то будетъ $64 + 824 = 400 + 560$ несходно;

когда $x=5$, то будетъ $125 + 1030 = 625 + 560$ несходно;

когда $x=7$, то будетъ $343 + 1442 = 1225 + 560$ сходно, слѣд. $x=7$ есть корень нашего уравненія; а что бы сыскать и другіе два, то раздѣли послѣднюю формулу на $x-7$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-7) x^3-25xx+206x-560 \overline{) x^3-18x+80} \\
 \underline{x^3-7xx} \\
 -18xx+206x \\
 \underline{-18xx+126x} \\
 +80x-560 \\
 \underline{80x-560}
 \end{array}$$

Сие найденное частное положи $=0$, и будетъ $xx-18x+80=0$, или $xx=18x-80$, откуда $x=9 \pm 1$, по чему другіе оба корня суть $x=8$ и $x=10$.

Отвѣтъ. На сей вопросъ найдены 3 отвѣта: по первому рѣшенію число купцовъ было 7; по второму 8; а по третьему 10, какъ всѣхъ ихъ трехъ совокупленная вѣсь проба показывашъ

число купцовъ	I 7	II 8	III 10
каждой кладетъ 40х	280	320	400
всѣ вмѣстѣ кладутъ			
40хх —	1260	2560	4000
старой капиталъ	8240	8240	8240
весь капиталъ }			
40хх + 8240 }	10200	10800	12240
смы въиграно }			
столько процентовъ }	714	864	1224
сколько товарищей }			
изъсего каждой бе- }			
ретъ 10х — }	70	80	100
всѣ взяли 10хх —	490	640	1000
и такъ еще останетъ.	224	224	224



ГЛАВА XII.

О правилѣ Кардана, или Сципіона Феррея.

735.

Если какое нибудь кубическое уравненіе приведено будетъ въ цѣлыя числа, какъ уже выше сего показано, и ни одинъ дѣлитель послѣдняго члена корней уравненія быть не можетъ, то сіе значить, что уравненіе не имѣетъ ни какого корня ни въ цѣлыхъ числахъ, ни въ дробяхъ, что можетъ быть показано такъ :

Пусть будетъ уравненіе $x^3 - axx + bx - c = 0$; гдѣ a , b и c суть цѣлыя числа, и гдѣ ни одна дробь величиною x быть не можетъ: ибо еслибы положено было $x = \frac{p}{q}$, то вышлобы $\frac{p^3}{q^3} - \frac{a}{q} \frac{p^2}{q} + \frac{b}{q} \frac{p}{q} - \frac{c}{q} = 0$; здѣсь имѣетъ только первый членъ знаменателя 8, прочіе же раздѣлены только на 4 и 2, или суть цѣлыя числа, но слѣд. съ первымъ не могутъ быть

= 0

то, что должно думать и о всѣхъ прочихъ дробяхъ.

736.

По елику въ сихъ случаяхъ корни уравненія ни цѣлыя числа, ни дроби быть не могутъ, то должны они быть неизвлекаемы, такъ и невозможные. Какимъ образомъ ихъ извѣдывать надлежитъ и что за знаки коренные въ такомъ уравненіи случаются, есть дѣло великой важности, коихъ изобрѣтеніе уже за нѣсколько сотъ лѣтъ приписано было Кардану, или наипаче Сципіону Феррею, что здѣсь обстоятельно извѣстнѣе надобно.

737.

На сей концѣ надлежитъ здѣсь обстоятельнѣе разсмотрѣть натуру куба, коего корень состоитъ изъ двухъ частей. Такъ пусть будетъ корень $a + b$, то кубъ его $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, которой состоитъ изъ кубовъ каждой части, и сверхъ того имѣетъ еще два средніе члена, то есть, $3aab + 3abb$, которые

К 2

оба

оба имѣютъ множителемъ $3ab$, другой же множитель есть $a + b$; ибо $3ab$ умноженные на $a + b$, даютъ $3aab + 3abb$, по чему сіи два члена содержатъ упрощенное произведеніе обѣихъ частей a и b на сумму ихъ помноженное,

738.

Положи $x = a + b$, и возми съ обѣихъ сторонъ кубы, будетъ $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, и когда $a + b = x$, то получится сіе кубическое уравненіе $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$, или $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, о которомъ мы знаемъ, что одинъ его корень есть $x = a + b$; слѣд. когда бы такое уравненіе ни случилось, корень его означивъ мы, можемъ.

Пусть будетъ напр. $a = 2$ и $b = 3$, то выйдетъ уравненіе $x^3 = 18x + 35$; въ коемъ мы заподалинно знаемъ, что $x = 5$ есть его корень.

739.

Положи еще $a^2 = p$ и $b^2 = q$, то будетъ $a = \sqrt{p}$ и $b = \sqrt{q}$, слѣд. $ab = \sqrt{pq}$;

в

и такъ когда случится уравненіе $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq}$
 $+ p + q$, коего одинъ корень естъ $\sqrt[3]{p}$
 $+ \sqrt[3]{q} = x$; но p и q всегда можно опре-
 дѣлить такъ, что какъ 3 раза $\sqrt[3]{pq}$, такъ
 и $p + q$ будутъ всегда равны даннымъ
 числамъ, и чрезъ то мы приводимъ въ
 состояніе разрѣшать каждое такого роду
 кубическое уравненіе.

740.

Чего ради пусть дано будетъ сіе
 общее кубическое уравненіе $x^3 = fx + g$;
 въ семъ случаѣ f должно сравнивать съ
 $3\sqrt[3]{pq}$, а g съ $p + q$, или p и q , такъ
 опредѣлить надлежитъ чтобъ $3\sqrt[3]{pq}$ числу
 f , а $p + q$ числу g равны были, и тогда
 узнаемъ мы, что корень уравненія на-
 шего будетъ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

741.

Слѣдовательно надлежитъ разрѣ-
 шить сіи два уравненія I) $3\sqrt[3]{pq} = f$; II)
 $p + q = g$. Изъ перваго получимъ $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$
 а $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ и $4\sqrt[3]{q} = \frac{f}{\sqrt[3]{p}}$; изъ другаго
 уравненія взявъ его квадраты выдѣлѣ
 $pp + 2pq + qq = gg$, откуда вычли

К 4

4pq

$4pq = \frac{4}{27}f^3$, выдѣлѣ $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$,
 извлечки квадратной корень, и будетъ
 $p - q = \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$ и понемѣ $p + q = g$, то
 будетъ $2p = g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$, $2q = g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$
 отсюда получаемъ мы $p = g \frac{+ \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$
 и $q = g \frac{- \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$

742.

И такъ если случится кубическое
 уравненіе $x^3 = fx + g$, какія бы числа f
 и g ни были, то корень его всегда бу-
 детъ $x = \sqrt[3]{g + \frac{+ \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{g - \frac{- \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}}$

откуда явствуетъ, что сія неизвѣсто-
 мость содержитъ въ себѣ не только
 знакъ квадратнаго корня, но также и
 кубическаго; и сія формула есть самое
 то, что обыкновенно Кардановымъ пра-
 виломъ называется.

743.

Сію формулу изъяснимъ нѣсколь-
 кими примѣрами.

Пусть

Пусть будетъ $x^2 = 6x + 9$, то видно что $f = 6$, $g = 9$, $gg = 81$, $f^3 = 216$, $\sqrt[3]{f} = 6$, слѣд. $gg - \sqrt[3]{f} = 75$, и квадратной корень изъ $gg - \sqrt[3]{f} = 75$; и такъ предложеннаго уравненія корень $x = \sqrt[3]{\frac{216}{2}} + \sqrt{\frac{75}{2}}$, то есть, $x = \sqrt[3]{108} + \sqrt{37.5} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, или $x = 2 + 1 = 3$.

744.

Пусть еще дано будетъ уравнение $x^4 = 3x + 2$, то будетъ $f = 3$, $g = 2$, $gg = 4$, $f^3 = 27$, $\sqrt[3]{f} = 3$ слѣд. квадратной корень изъ $gg - \sqrt[3]{f} = 0$, по чему корень будетъ $x = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{0}{2}}$ $x = 1 + 1 = 2$.

745.

Но такое уравнение имѣетъ хотя и рациональной корень, однакожь часто случается, что его по сему правилу найти не можно, хотя помянутой корень въ немъ и содержится.

Пусть дано будетъ уравнение $x^2 = 6x + 40$, гдѣ корень $x = 4$. Значь $f = 6$, $g = 40$, $gg = 1600$ и $\sqrt[3]{f} = 6$; слѣд.

К 5

gg

$gg - \frac{1}{27}f^3 = 1568$ и $V(gg - \frac{1}{27}f^3) = V1568 = V4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2 = 28V2$; по чему корень $x = \sqrt[3]{\frac{20 + 14V2}{2}} + \sqrt[3]{\frac{20 - 14V2}{2}}$, или $x = \sqrt[3]{20 + 14V2} + \sqrt[3]{20 - 14V2}$ которая формула дѣйстви- тельно равна 4, хотя сего и не видно; ибо когда кубъ $2 + V2$ есть $20 + 14V2$, то об- раотно корень кубичной наъ $20 + 14V2$ есть $2 + V2$; и такимъ же точно образомъ $\sqrt[3]{20 - 14V2} = 2 - V2$, откуда корень нашъ $x = 2 + V2 + 2 - V2 = 4$.

746.

Можно сказать проптиву сего пра- вила, что сго не во всѣхъ кубичныхъ уравненіяхъ употреблять можно, попо- му что въ немъ квадрата x не находи- ся, или для того, что въ немъ не до- стаетъ втораго члена. Въ семъ случаѣ знать надлежитъ, что каждое полное уравненіе всегда можно превратить въ другое, въ которомъ втораго члена не находится, и слѣдовательно тогда сѣ правило употребить можно будетъ. Для изъясненія сего пусть дано будетъ пол-
ное

носъ кубическое уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; здѣсь берется прѣмая часть числа при выпоромѣ членѣ находящагося , и полагается $x = y + 2$, откуда $x = y + 2$; прочая выкладка будетъ слѣдующая :

$$\begin{aligned} \text{положивъ } x &= y + 2, & xx &= y^2 + 4y + 4, \\ & & x^3 &= y^3 + 6yy + 12y + 8, \end{aligned}$$

$$\text{будетъ } x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$$

$$- 6xx = - 6yy - 24y - 24$$

$$+ 11x = + 11y + 22$$

$$- 6 = - 6$$

$$0 = y^3 - y$$

Откуда получаемъ мы уравненіе $y^3 - y = 0$, коего рѣшеніе легко видѣть можно ; ибо разрѣшивъ его на множители будетъ $y(y^2 - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$, и ежели каждой множитель положится $= 0$, то получится

$$\begin{array}{lll} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array} \right. & \text{II} \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. & \text{III} \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 3, \end{array} \right. \end{array}$$

кон

кои суть при уже выше сего найденные корни.

747.

Пусть теперь дано будетъ сѣ общее кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, изъ коего выключивъ надлежишь второй членъ.

На сей конецъ приложн къ x третью часть числа при второмъ членѣ находящагося и съ его знакомъ; а мѣсто того напиши другую букву, напр. y , по сему правилу получимъ мы $x + \frac{1}{3}a = y$, и $x = y - \frac{1}{3}a$, откуда произойдѣтъ слѣдующая выкладка:

$$x = y - \frac{1}{3}a ; \quad xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa ; \quad x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$$

$$\text{слѣдов. будетъ } x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$$

$$+ axx = + ay^2 - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^2$$

$$+ bx = \quad + by - \frac{1}{3}ab$$

$$+ c = \quad + c$$

$$y^3 - \frac{1}{3}aay + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$$

$$+ by$$

И такъ

И такъ мѣсто прежняго уравненія выдетъ сіе , въ которомъ втораго члена не имѣется.

748.

Теперь можно Карданово правило употребить также и въ семъ случаѣ; ибо прежде сего имѣли мы уравненіе $x^3 = fx + g$, или $x^3 - fx - g = 0$, то въ нашемъ примѣрѣ будетъ $f = \frac{1}{3}aa - b$, и $g = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$, и изъ сихъ вмѣсто буквъ f и g найденныхъ величинъ получимъ какъ и прежде

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$$

и если такимъ образомъ найдется y , то въ данномъ уравненіи будетъ мы имѣть $x = y - \frac{1}{3}a$.

749.

Помощію сей перемѣны въ состояніи мы найти корни всѣхъ кубичныхъ уравненій, что слѣдующимъ примѣромъ изъяснить можно: пусть будетъ данное уравненіе $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$, и дабы изъ него исключить вторую членъ, то положимъ $x - 2 = y$, и будетъ

$$x = y$$

174 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХ.

$$x = y + 2; \quad xx = yy + 4y + 4; \quad x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8;$$

$$\begin{array}{rcl} \text{слѣд. } x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ - 6xx = & - 6yy - 24y - 24 \\ + 13x = & + 13y + 26 \\ - 12 = & - 12 \end{array}$$

$y^3 + y - 2 = 0$, или $y^3 = -y + 2$, что по формулѣ $x^3 = fx + g$ дастъ $f = -1$, $g = 2$ и $gg = 4$, $f^3 = -\frac{4}{27}$ слѣд. $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{116}{27}$ отсюда получится $\sqrt[3]{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt[3]{\frac{116}{27}} = \frac{\sqrt[3]{116}}{3}$

$$\text{откуда слѣдуетъ } y = \sqrt[3]{\frac{2 + 4\sqrt[3]{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2 - 4\sqrt[3]{21}}{9}}, \text{ или}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{1 + 2\sqrt[3]{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1 - 2\sqrt[3]{21}}{9}}, \text{ или} \\ y &= \sqrt[3]{\frac{9 + 2\sqrt[3]{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 2\sqrt[3]{21}}{9}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{27 + 6\sqrt[3]{21}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{27 - 6\sqrt[3]{21}}{27}}, \text{ или} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt[3]{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt[3]{21}};$$

изъ чего выдстъ $x = y + 2$.

750.

При разрѣшеніи сего примѣра, хотя дошли мы до двоякой неизвлекаемости; однако изъ сего заключаешь не должно, что корень дѣйствительно быть долженъ неизвлекаемое число, ибо случисься можетъ, что биномъ или двучленное количество $27 \pm 6\sqrt{21}$ будетъ дѣйствительной кубъ; что самое и дѣлѣ случилось. Ибо кубъ половины $\frac{27 \pm 6\sqrt{21}}{2} = \frac{27}{2} \pm \frac{6\sqrt{21}}{2} = 27 \pm 6\sqrt{21}$; слѣд кубичной корень изъ $27 \pm 6\sqrt{21} = \frac{27 \pm 6\sqrt{21}}{2}$, а кубичной корень изъ $27 - 6\sqrt{21} = \frac{27 - 6\sqrt{21}}{2}$, по чему величина $y = \frac{1}{2}(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, и когда $y = 1$, то будетъ $x = 3$, которое число есть корень предложеннаго уравненія; а естли бы захотѣлъ кто сыскать и другіе два корня, то должно бы уравненіе раздѣлить на $x - 3$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-3 \left| \begin{array}{l} x^3-6xx+13x-12 \\ x^3-3xx \\ \hline -3xx+13x \\ -3xx+9x \\ \hline +4x-12 \\ +4x-12 \\ \hline \end{array} \right| x^2-3x+4
 \end{array}$$

Положивъ частное $xx-3x+4=0$,
будетъ $xx=3x-4$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}$
 $=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$, то есть $x=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$ оба по-
слѣдніе корни, которые суть невозможны.

751.

Здѣсь должно приписывать шас-
тно, что изъ найденныхъ биноміевъ
дѣйствительно кубичной корень извлечь
можно было, что въ пѣхъ только слу-
чаяхъ дѣлается, когда уравненіе имѣетъ
раціональной корень, которой бы для
сей причины гораздо легче найти можно
было, по правилу въ прежней главѣ пред-
писанному. А еслии уравненіе не имѣ-
етъ раціональнаго корня, то не можно
иначе его изъяснить, какъ по сему Карда-
нову

нову правилу, такъ что въ томъ случаѣ
 никакое сокращеніе уже мѣста не имѣетъ.
 Какъ напр. въ уравненіи $x^2 = 6x + 4$,
 гдѣ $f = 6$, $g = 4$, найдется $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})}$
 $+ \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, коего иначе изъавить
 нельзя.

ГЛАВА XIII.

О разрѣшеніи уравненій четвертой сте-
 пени, кои также и биквадратные
 называются.

752

Если высшая степень числа x бу-
 детъ четвертая, то такія уравненія
 называются уравненіями четвертой сте-
 пени или биквадратными, коихъ общая
 формула есть $x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$.
 Изъ сего рода уравненій сперва разсмо-
 треть надлежитъ чистые биквадратные
 уравненія, которыхъ формула есть $x^4 = f$.
 и изъ коихъ поимясъ корень найти мо-
 томо II. Л жно

жно, извласкиши только съ обоѣхъ споронъ корень четвертой степени, какъ $x = \sqrt[4]{f}$.

753.

Поселику x^2 есть квадратъ изъ x , то выкладка немало облегчится, если сперва извлеченъ только квадратной корень, ибо тогда будетъ $x^2 = \sqrt{f}$, а потомъ извласкиши въ другой разъ опять же квадратной корень будетъ $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, такъ что $\sqrt[4]{f}$ ни что иное есть, какъ квадратной корень изъ квадратнаго корня f .

Если бы напр. уравненіе было $x^2 = 2401$, то отсюда найдется сперва $x^2 = 49$, а потомъ $x = 7$.

754.

Но сѣмъ образомъ находимъ мы только одинъ корень; а поселику каждое кубическое уравненіе оныхъ имѣетъ три, то безъ сумнѣнія ихъ здѣсь должно быть 4, кои сѣмъ образомъ найдутся. Въ послѣднемъ примѣрѣ нашли мы не только $x^2 = 49$, но также $x^2 = -49$, то явствуетъ

ствусиѣ, что изъ перваго найдутся два корня $x=7$ и $x=-7$; а изъ другаго $x=\sqrt{-49}=7\sqrt{-1}$ и $x=-\sqrt{-49}=-7\sqrt{-1}$, кои суть 4 корня числа 2401; то же самое должно думать и о всѣхъ прочихъ числахъ.

755.

Послѣ сихъ чистыхъ уравненій слѣдуютъ по порядку тѣ, въ которыхъ втораго и четвертаго члена не находится, или кои въ сей формулѣ содержатся: $x^2+fx+g=0$, и кои по правилу квадратныхъ уравненій разрѣшены быть могутъ. Ибо положивъ $xx=y$ будетъ $y^2+fy+g=0$ или $yy=-fy-g$ откуда найдется $y=-\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2-g} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2-4g}}{2}$ и поелику $xx=y$, то отсюда будетъ $x=\pm \sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{f^2-4g}}{2}}$, гдѣ двойные знаки \pm покажутъ всѣ 4 корня уравненія.

756.

Когда же въ уравненіи всѣ члены находятся, то можно оное почести какъ произведеніе изъ четырехъ множителей.

Л 2

Ибо

Ибо умножѣ сѣи 4 множителя между собою $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, то найдется слѣдующее произведеніе: $x^4 - x^3(p+q+r+s) + x^2(pq+pr+ps+qr+qs+rs) - x(pqr+pqr+prq+prq+qrs) + pqrs$, которая формула не иначе о бытъ можетѣ, какѣ когда одинѣ изѣ сихѣ 4 хѣ множителей будетѣ 0, а сѣ вѣ 4 хѣ случаяхѣ здѣлашья можетѣ

I) когда $x=p$; II) $x=q$; III) $x=r$; IV) $x=s$ кои слѣдовательно суть корни предложеннаго уравненія.

757.

Ежели мы сѣю формулу обстоятельно разсмотримѣ, то найдемѣ, что во второмѣ членѣ находится сумма всѣхѣ 4 хѣ корней помноженныхѣ на $-x^3$; вѣ третьемѣ членѣ находится сумма произведеній изѣ каждахѣ двухѣ корней умноженныхѣ между собою и на x^2 ; вѣ четвертомѣ сумма произведеній каждахѣ трехѣ корней помноженныхѣ между собою и на $-x$; и наконецѣ вѣ пятомѣ и послѣднемѣ находится произведеніе изѣ всѣхѣ

всѣхъ четырехъ корней помноженныхъ между собою.

758.

Поелику послѣдней членъ есть произведение изъ всѣхъ 4 хъ корней, то такое биквадратное уравнение, не можетъ другаго раціональнаго имѣть корня, какъ того, которой вмѣстѣ есть и дѣлитель послѣдняго члена. По сей причинѣ всѣ раціональные корни, еслимъ только они въ уравненіи содержатся, легко найти можно, полагая только мѣсто x по порядку каждаго дѣлителя послѣдняго члена, и смотря по которымъ изъ нихъ уравненіе разрѣшится; и еслили хотя только одинъ такой корень найдется, какъ напр. $a = p$, то раздѣли уравненіе, перенеся всѣ члены на одну сторону, на $x - p$, и частное положивъ $= 0$ дастъ кубическое уравненіе, которое по предписаннымъ выше сего правиламъ разрѣшить можно.

Къ сему требуется , чтобъ всѣ члены соспопали изъ цѣлыхъ чиселъ , и чтобъ первой членъ умноженъ былъ только на 1. А когда бы въ нѣкоторыхъ членахъ случились дроби , то должно бы было ихъ сперва изключить изъ уравненія , что всегда учиниться можетъ , полагая мѣсто x число y раздѣленное на число , которое знаменателей дробей въ себѣ заключаетъ. Такъ когда бы дано было уравненіе $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{3}{4}x + \frac{1}{12} = 0$, и когда въ знаменателяхъ 2 и 3 сѣ ихъ степенями находятся, то положи $x = \frac{y}{2}$, и будетъ $\frac{y^4}{16} - \frac{1}{8}\frac{y^3}{2} + \frac{1}{6}\frac{yy}{2} - \frac{3}{8}\frac{y}{2} + \frac{1}{12} = 0$, что умноживъ на 6 дастъ $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$; и если бы теперь кто захотѣлъ знать , имѣетъ ли сіе уравненіе рациональные корни , то къ сему требуется только класть по порядку всѣхъ дѣлителей числа 72 мѣсто y , и смотрѣть когда уравненіе равно 0 будетъ.

760.

Но поелику корни уравненія какъ положительные , такъ и отрицательные быть могутъ , то съ каждымъ дѣлителемъ должно бы было дѣлать двѣ пробы , первую полагая его положительнымъ , а вторую отрицательнымъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ , что сколь часто два знака $+$ и $-$ между собою переменяются , уравненіе имѣетъ столькожъ положительныхъ корней ; а сколько разъ два одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ , столько отрицательныхъ корней уравненіе имѣетъ. И поелику въ нашемъ примѣрѣ 4 переменны знаковъ находятся , и нѣтъ ни одного слѣдствія оныхъ , того ради всѣ корни оного суть положительные , и посему нѣтъ нужды брать дѣлителя послѣдняго члена отрицательнаго

761.

Пусть будетъ напр. дано уравненіе $x^4 + 2x^3 - 7xx^2 - 8x - 12 = 0$, здѣсь находящя двѣ переменны знаковъ и два

А 4

слѣд-

слѣдствія , изъ чего вѣрно заключить можно , что сіе уравненіе имѣетъ два корня положительныя , и два отрицательныя , кои всѣ должны быть дѣлителями послѣдняго члена ; и когда оныя суть 1, 2, 3, 4, 6, 12 , то здѣлай сперва пробу , положивъ $x = +1$, и выдетъ дѣйствительно 0 , по чему одинъ корень есть $x = 1$; а когда положится еще $x = -1$, то выдетъ слѣдующее $+1 - 2 + 8 + 12 - 7 = 21 - 9 = 12$ и слѣд. $x = -1$ не можетъ быть корень сего уравненія . Положи еще $x = 2$, то наша формула будетъ опять $= 0$, по чему $x = 2$ есть корень уравненія ; напротивъ того $x = -2$ онымъ быть не можетъ . Положи еще $x = 3$, то выдетъ $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$, не годится ; а ежели положится $x = -3$, то выдетъ $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$ и $x = -3$ есть корень уравненія ; также найдется , что $x = -4$ будетъ корень уравненія , такъ что всѣ 4 корня суть рациональны , и такого состоянія :

I) $x=1$; II) $x=2$, III) $x=-3$; IV) $x=-4$, изъ коихъ два положительныхъ , и два отрицательныхъ , какъ прежде правило показывашъ.

762.

Когда же въ уравненіи не будетъ ни одного рациональнаго корня , по симъ образомъ найти ихъ не лзя; и для того ученые думали, какимъ бы образомъ въ сихъ случаяхъ , не извлекаемые корни изълвить можно было ; и въ семъ столь щастливы были , что нашли два различные средства къ доспигенію познанія такихъ корней , какого бы состоянія биквадратное уравненіе ни было.

Но прежде нежели мы сіе средство покажемъ , не безнужно разрѣшить напередъ нѣсколько особливыхъ случаевъ , кои весьма часто съ пользою употреблены быть могутъ.

763.

Если уравненіе будетъ такого состоянія, что въ немъ числа при членахъ

А 5

нахъ

нахъ находящіяся такимъ же порядкомъ
вдушъ въ задъ, какъ и въ передъ, какъ
видно въ уравненіи $x^4 + mx^3 + pxx + mx + 1 = 0$
которое вообще изображено быть можетъ
 $x^4 + max + naax + ma^2x + a^4 = 0$, ко-
торую формулу всегда почестъ можно
за произведеніе изъ двухъ квадратныхъ
множителей, кои легко опредѣлить мо-
жно. Ибо мѣсто сего уравненія положи
слѣдующее произведеніе $(xx + pax + aa)$
 $(xx + qax + aa) = 0$, гдѣ p и q сыскашь
надлежишь, чтобъ вышло прежнее ура-
венніе. Понеже по дѣйствительному
умноженію находимся

$x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)aa xx +$
 $(p + q)a^2x + a^4 = 0$, и чтобы сіе уравне-
ніе прежнему равно было, требую-
тся двѣ вещи: I) $p + q = m$; II) $pq + 2 = n$;
слѣд. $pq = n - 2$; взявъ первой квадратъ
будетъ $pp + 2pq + qq = mm$, изъ сего
второе 4 раза взятое вычти, аимянно
 $4pq = 4n - 8$ ошанется $pp - 2pq + qq$
 $= mm - 4n + 8$, коего квадратной ко-
рень $p - q = \sqrt{mm - 4n + 8}$; но $p + q$
 $= m$

$=m$, то по сложению получимъ $2p = m + V(m^2 - 4n + 8)$ или $p = \frac{m + V(m^2 - 4n + 8)}{2}$, а по вычитанію $2q = m - V(m^2 - 4n + 8)$ или $q = \frac{m - V(m^2 - 4n + 8)}{2}$ а изшедъ p и q положи только каждаго множителя $= 0$, ишобы отсюда найти величину x .

Первой $xx + pax + aa = 0$ или $xx = -pax - aa$ дастъ $x = -\frac{p^2}{2} \pm V \frac{p^2}{4} - aa) = -\frac{p^2}{2} \pm aV(p^2 - 4)$ или $x = -\frac{p^2}{2} \pm \frac{1}{2}aV(pp - 4)$

Другой множитель дастъ $x = -\frac{q^2}{2} \pm \frac{1}{2}aV(qq - 4)$. Симъ образомъ найдутся 4 корня данного уравненія.

764.

Для изясненія сего пусть дано будетъ уравненіе $x^4 - 4x^2 - 3xx - 4x + 1 = 0$, здѣсь $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, слѣд. $mm - 4n + 8 = 36$, откуда квадратной корень $= 6$ чего ради получится $p = \frac{-4 + 6}{2} = 1$; и $q = \frac{-4 - 6}{2} = -5$, по чему 4 корня будутъ I) и II) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}V - 3 = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; III)

и IV) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, и такъ 4 корня данного уравненія будутъ слѣдующія
 I) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; II) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; III) $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$;
 IV) $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$, изъ коихъ первые два не возможные, прочие же два возможны; по тому что $\sqrt{21}$ такъ аккуратно опредѣлить можно, какъ кто захочетъ, изобразивъ корень въ дробяхъ десятичныхъ; ибо 21 тоже что и 21, 00000000, того ради извласки отсюда квадратной корень какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 21 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 4}}} , 5825 \\
 \underline{16} \\
 500 \\
 82 \\
 \underline{425} \\
 7500 \\
 800 \\
 \underline{7264} \\
 23600 \\
 8500 \\
 \underline{18324} \\
 527600 \\
 61800 \\
 \underline{458225} \\
 69375
 \end{array}$$

послѣду

послику $\sqrt{21} \approx 4, 5825$, то третьей корень будетъ почти точно $x \approx 4, 7912$, и четвертой $x \approx 0, 2087$, которые еще точнѣе вычислить можно.

Понже четвертой корень довольно справедливъ, то есть $\frac{1}{10}$ или $\frac{1}{11}$, того ради сѣ величина почти разрѣшивъ наше уравненіе; и такъ положа $x = \frac{1}{11}$, будетъ $\frac{1}{11^3} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{11} + 1 = \frac{1}{1331}$, а должно бы быть $= 0$, что довольно съ правдою сходно.

765,

Другой случай, въ которомъ подобное сему рѣшеніе мѣсто имѣетъ, есть, когда числа въ уравненіи будутъ всѣ тѣ же, какъ и въ прежнемъ, только что при второмъ и четвертомъ членахъ разные съ прежними знаки находятся. Такое уравненіе будетъ,

$x^4 - max^3 + paqx - ma^2x + a^4 = 0$,
 которое извѣщено быть можетъ слѣдующимъ произведеніемъ $(xx + pax - aa)$
 $(xx + qax - aa) = 0$, и чрезъ самое умноженіе получимся $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)$
 $aaqx$

$axx - (p+q)a^2x + a^4$, которое съ прежнимъ уравненіемъ будетъ одинако, еслили будетъ $p+q=m$, и $pq-2=n$, или $pq=n+2$; ибо четвертой членъ самъ по себѣ будетъ тотъ же съ прежнимъ. Возми квадратъ перваго уравненія $pp + 2pq + q^2 = m^2$, изъ сего вычли вышес 4 раза взятое, ш: с $4^2q = 4n + 8$ и будетъ $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$, откуда квадратной корень дастъ $p - q = \sqrt{mm - 4n - 8}$; слѣд. будетъ $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$ и $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$. Симъ образомъ нашедъ p и q первой множитель дастъ сіи два корня $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{pp+4}$; а второй множитель сіи два $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq+4}$. Симъ образомъ найдены будутъ всѣ 4 корня уравненія предложеннаго.

766.

Пусть дано будетъ наприм. уравненіе $x^4 - 3.2x^2 + 3.8x + 16 = 0$, гдѣ $a=2$, и $m=-3$, $n=0$; слѣд. $\sqrt{mm-4n-8}=1$, и $p = \frac{-3+1}{2} = -1$; $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, откуда
два

два первые корни будутъ $x = 1 + \sqrt{5}$, а два послѣдніе $x = 2 + \sqrt{8}$, такъ что всѣ 4 искомыя корни суть I) $x = 1 + \sqrt{5}$; II) $x = 1 - \sqrt{5}$; III) $x = 2 + \sqrt{8}$; IV) $x = 2 - \sqrt{8}$. По сему 4 множителя нашего уравненія будутъ $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$ которые самымъ дѣломъ умножены будучи между собою, наше уравненіе произвести должны; ибо изъ умноженія перваго и втораго выходитъ $x^2 - 2x - 4$; изъ умноженія двухъ другихъ выходитъ $x^2 - 4x - 4$, и сіи два произведенія между собою умноженные, даютъ $x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 16$ точно въ нашемъ примѣрѣ предложенное уравненіе.



ГЛАВА XIV.

О Помбеллиевомъ правилѣ биквадратныя уравненія приводить въ кубичныя.

767.

Послѣку мы уже видѣли, какъ кубичныя уравненія рѣшаются по правилу Кардана, то при биквадратныхъ уравненіяхъ все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ рѣшеніе оныхъ знавъ обращать въ кубичныя уравненія. Ибо безъ помощи кубическаго уравненія биквадратное разрѣшить вообще не возможно, потому что хотя бы и нашелся одинъ корень такого уравненія, то остальные пребудутъ еще кубическаго рѣшенія. Отсюда видно, что для рѣшенія уравненій вышешихъ спсбней должно знать напередъ рѣшеніе нижнихъ.

768.

На сей конецъ Италіанецъ Помбелли за нѣсколько уже сомѣлѣтъ предъсимѣ нашелъ правило, которое мы въ сей главѣ предложимъ намѣрсны.

Пусть

Пусть дано будетъ генеральное би-
квадратное уравненіе $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, гдѣ буквы a, b, c и d всѣ воз-
можныя числа значить могутъ. Теперь
представимъ себѣ надлежитъ , что сіе
уравненіе одинаково съ слѣдующимъ $(xx + ax + p)^2 - (qx + r)^2$, гдѣ нужно толь-
ко опредѣлить буквы p, q и r , такъ
чтобы вышло данное уравненіе , и при-
ведя послѣднее сіе въ порядокъ выдемъ :

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \frac{1}{2}aaxx + apx + pp \\ + 2pxx - 2qrx - rr \\ - qqxx \end{aligned}$$

Первые два члена здѣсь съ двумя пер-
выми данного уравненія одинаки , а мѣ-
сто третяго должно положить $\frac{1}{2}aa + 2p - qq = b$, откуда будетъ $qq = \frac{1}{2}aa + 2p - b$; мѣсто четвертаго положимъ дол-
жно $ap - 2qr = c$, откуда $2qr = ap - c$,
а мѣсто послѣдняго надлежитъ поло-
жить $pp - rr = d$, и будетъ $rr = pp - d$,
изъ сихъ трехъ уравненій должно опре-
дѣлить буквы p, q и r ,

Толи П.

М

769.

Что бы сіе легче учинить , то возми первое уравненіе 4 жды , и будеть $4qq = aa + 8p - 4b$, сіе умножь на послѣднѣе $rr = pr - d$, и получишся $4qqrr = 8p' + (aa - 4b)rr - 8dr - d(aa - 4b)$, возми теперь квадратъ средняго уравненія $4qqrr = aarr - 2acr + cc$, по чему будемъ мы имѣть двѣ величины для $4qqrr$, которыя положивъ равными между собою , произойдетъ уравненіе $8p' + (aa - 4b)rr - 8dr - d(aa - 4b) = aarr - 2acr + cc$ и перенеся всѣ члены на одну сторону , выдетъ $8p' - 4brr + (2ac - 8d)r - aad + 4bd - cc = 0$, которое есть кубическое уравненіе , и изъ коего въ каждомъ случаѣ величину r по выше показанному правилу опредѣлять должно.

И когда изъ данныхъ чиселъ a , b , c , d найдена будеть буква p , то довольно уже сего будеть , чтобы найти опшуда двѣ другіе q и r , изъ перваго уравненія будеть $q = \sqrt{aa + 2p - b}$, а изъ
другаго

другаго $r = \frac{p}{2} - \frac{c}{2}$. И если сіи три буквы для каждаго случая уже найдены, то отсюда можно сыскать всѣ 4 корня предложеннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

771.

Когда данное уравненіе приведемъ мы въ формулу $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, то $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$, откуда извлекиши квадратной корень будетъ $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, или также $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.

Первое уравненіе дастъ $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, откуда получатся два корня, прочіе же два изъ другаго, которое есть $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$. Чтобы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть предложено будетъ уравненіе $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, которое сравнимъ съ генеральною нашею формулою, дастъ $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$. изъ коихъ для опредѣленія p слѣдующее уравненіе производитъ $8p^2 - 140pp + 808p - 1540 = 0$, которое раздѣливъ на 4 дастъ $2p^2 - 35pp + 202p - 385 = 0$. Дѣлители

М 2

послѣ-

послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и прѣдѣсь 1 мала, есѣли же положится $p=5$, то выдеѣтъ $250-875+1010-385=0$, слѣд. $p=5$, и когда положишь $p=7$, то выдеѣтъ $686-1715+1414-385=0$, слѣд. $p=7$, другой корень; а что бы сыскать и третей корень, то раздѣли уравненіе на 2, и выдеѣтъ $p^2 - \frac{15}{2}p + 101p - \frac{385}{2} = 0$; и когда число во впоромѣ числѣ $\frac{15}{2}$ есѣть сумма всѣхъ трехъ корней, первые же 2 вмѣстѣ дѣлаютъ 12, чего ради третей корень долженъ быть $\frac{11}{2}$. Такимъ образомъ нашли мы всѣ три корня, но довольно бы было и одного, потому что изъ каждаго изъ нихъ четыре корня нашего биквадратнаго уравненія опредѣлились должны.

772.

Дабы сіе показать, то пусть сперва будѣтъ $p=5$, откуда $q = \sqrt{25+100-35} = 0$, $r = \frac{-5 \pm 5}{2} = \frac{0}{2}$. Но поелику симъ образомъ ни чего опредѣлить нельзя, то возми третіе уравненіе $rr = pr - d = 25 - 24 = 1$, слѣд. $r = 1$; отсюда оба наши квадратныя уравненія будутъ I) $xx = 5x - 4$, II)

II) $xx = 5x - 6$: первое дастъ сѣмь два корня $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, или $x = \frac{3}{2}$, т. е. $x = 4$, или $x = 1$.

Другое уравненіе дастъ $x = 5 \pm \sqrt{4}$, или $x = \frac{7}{2}$, то есть $x = 3$, или $x = 2$.

Естьли же положимся $p = 7$, то будетъ $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ и $r = \frac{-70 \pm 50}{4} = -5$; откуда производятъ сѣмь два квадратныя уравненія: I) $xx = 7x - 12$; II) $xx = 3x - 2$, изъ коихъ первое дастъ корни $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$; слѣд. $x = \frac{3}{2}$, то есть $x = 4$, или $x = 3$, другое дастъ корни $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, слѣд. $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$, или $x = 1$, кои суть тѣ же самыя 4 корня какіе прежде найдены были, и самыя тѣ же найдутся и изъ третьей величины $p = 1$; ибо тогда будетъ $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ и $r = \frac{-55 \pm 50}{2} = -\frac{5}{2}$; откуда два квадратныя уравненія

I) $xx = 6x - \frac{16}{2}$, или $xx = 6x - 8$; II) $xx = 4x - 3$: изъ перваго получится $x = 3 \pm \sqrt{1}$, слѣд. $x = 4$, и $x = 2$; изъ другаго $x = 2 \pm \sqrt{1}$, то есть $x = 3$ и $x = 1$, коихъ суть тѣ же 4 корня.

773.

Пусть дано будетъ еще сіе уравненіе $x^4 - 16x - 12 = 0$, въ которомъ $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$, по чему кубическое наше уравненіе будетъ $8p^3 - 8dp - cc = 0$; или $8p^3 + 96p - 256 = 0$, то есть $p^3 + 12p - 32 = 0$, которое уравненіе еще простѣе избѣляется положивъ $p=2t$; ибо тогда будетъ $8t^3 + 24t - 32 = 0$, или $t^3 + 3t - 4 = 0$. Дѣлимы послѣдняго члена суть 1, 2, 4, изъ коихъ $t=1$ есть одинъ корень, откуда $p=2$ и $q=\sqrt{4}=2$, $r=\frac{16}{4}=4$, того ради оба квадратныя уравненія будутъ $xx=2x+2$ и $xx=-2x-6$; слѣд. корни $x=1 \pm \sqrt{3}$, и $x=-1 \pm \sqrt{-5}$.

774.

Для большаго изъясненія предложеннаго рѣшенія повторимъ оное снова въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть будетъ данное уравненіе $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, которое должно содержаться въ формулѣ $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, гдѣ въ первой части положено $-3x$ для того, что -3 есть полнѣ;

половина числа во второмъ членѣ уравненія -6 , и разрѣшивъ сію формулу выдесть $x^2 - 6x + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr)x + pr - rr = 0$. Сію формулу сравнивая съ даннымъ уравненіемъ получаются I) $2p + 9 - qq = 12$, II) $6p + 2qr = 12$; III) $pr - rr = 4$: изъ перваго будеть $qq = 2p - 3$; изъ другаго $2qr = 12 - 6p$, или $qr = 6 - 3p$: изъ пррствяго $rr = pr - 4$. Помножь теперь rr и qq между собою, получится $qqrr = 2p^2 - 3pr - 8p + 12$, и естли возмемъ квадратъ qr , то есть $qqrr = 36 - 36p + 9pr$, то получится уравненіе $2p^2 - 3pr - 8p + 12 = 9pr - 36p + 36$, или $2p^2 - 12pr + 28p - 24 = 0$, или раздѣливъ на 2 $p^2 - 6pr + 14p - 12 = 0$, косо корень $p = 2$, откуда $qq = 1$ и $q = 1$, $qr = 0$, и такъ уравненіе наше будеть $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, откуда квадратной корень $xx - 3x + 2 = \pm x$. Если мѣсто имѣющіхъ верхней знакъ, то выдесть $xx = 4x - 2$, естли же нижней, то $xx = 2x - 2$, откуда 4 корня найдутся $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.



ГЛАВА XV.

О новомъ рѣшеніи биквадратныхъ
уравненій.

775.

Какъ по прежнему правилу Помбелліа биквадратныя уравненія рѣшались помощію кубическихъ, такъ самое тоже учинить можно по найденному послѣ того средству, которое онъ прежняго совѣмъ разлукствуетъ, и заслуживаетъ особливое изъясненіе.

776.

Положи будпо бы корень биквадратнаго уравненія имѣлъ сію формулу $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ буквы p , q и r означающіе три корня, такого кубическаго уравненія какъ $z^3 - fzx + gx - h = 0$, такъ чпо $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ и $pqr = h$, сіе положивъ возми квадратъ означенной формулы $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, которой будешъ $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq}$
+ 2

$+ 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, понеже $p + q + r = f$, то будетъ $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; возьми еще квадратъ сего Уравненія , которой будетъ $x^4 - 2xxf + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqrr}$, и когда $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, то перенеся его на другую сторону будетъ $x^4 - 2xxf + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$ и когда $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$, а $pqr = b$, такъ что $\sqrt{pqr} = \sqrt{b}$, то симъ образомъ получимъ мы сіе биквадратное уравненіе $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{b} + ff - 4g = 0$, коего корень дѣйствительно будетъ $x = p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ p , q и r суть три корня прежняго кубическаго уравненія.

777.

Выведенное такимъ образомъ биквадратное уравненіе , можетъ взято быть за генеральное , хотя въ немъ x^4 и не находится; ибо каждое полное уравненіе можно превратить всегда въ такое, въ которомъ втораго члена не на-

М 5

ходится ,

ходится, какъ мы послѣ сего покажемъ. И такъ пусть дано будетъ сѣ биквадратное уравненіе $x^4 - axx - bx - c = 0$, коего найти должно корень, сравнивая его съ найденною формулою; а что бы сыскать буквы f, g, h , то требуется чтобъ было I) $2f = a$, т. е. $f = \frac{a}{2}$; II) $8Vb = b$ т. е. $Vb = \frac{b}{8}$ и $g = \frac{bb}{16}$; III) $ff - 4g = -c$, или $\frac{aa}{4} - 4g = -c$, или $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, по чему $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

778.

Когда изъ предложеннаго уравненія $x^4 - axx - bx - c = 0$ найдутся буквы f, g, h , такъ что $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, и $h = \frac{1}{16}bb$, или $Vb = \frac{1}{8}b$, то опшуда здѣлай уравненіе $z^4 - fzz + gz - h = 0$, коего 3 корня по выше показанному правилу находить должно, и кои будутъ I) $z = p$; II) $z = q$; III) $z = r$, изъ коихъ потомъ, еслии они найдены будутъ, корень нашего биквадратнаго уравненія выдѣль $x = Vp + Vq + Vr$.

779.

Хотя и кажется, что такимъ образомъ нашелся одинъ только корень нашего уравненія ; но послѣку каждой квадратной корень, какъ положительной, такъ и отрицательной знакъ при себѣ имѣть можетъ, по чему формула сія содержитъ всѣ 4 корня.

Если бы въ рѣшеніи всѣ перемѣны знаковъ допущены были, то бы выцѣли 8 величинъ для x , изъ коихъ однако только 4 мѣсто имѣть могутъ. При семъ примѣчать надлежитъ, что произведеніе изъ трехъ членовъ, т. е. \sqrt{pqr} должно быть равно $\sqrt{g} = \frac{1}{2}b$; откуда ежели $\frac{1}{2}b$ будетъ положительное число, то и произведеніе 3 хъ часшей положительное, въ которомъ случаѣ только 4 перемѣны быть могутъ:

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; если же $\frac{1}{2}b$ будетъ число отриц.

204 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЪ УРАВНЕНИЯХЪ

оприцательное, то 4 величины для x будутъ слѣдующіе :

$$I) x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}; \quad II) x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r};$$

$$III) x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}; \quad IV) x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.$$

По сему примѣчанію въ каждомъ случаѣ могутъ опредѣлены быть всѣ 4 корня, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

780.

Пусть дано будетъ биквадратное уравненіе, въ которомъ втораго члена не находящіяся $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$; сравнивъ его съ прежнею формулою будемъ $a = 25$, $b = -60$ и $c = 36$, откуда получимся $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$; и $h = \frac{225}{4}$, слѣд. кубическое уравненіе будетъ $z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$; а что бы исключивъ отсюда дроби, то положи $z = \frac{u}{4}$ и будемъ $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{u}{4} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, которое умноживъ на 64 выдемъ $u^3 - 50u^2 + 769u - 3600 = 0$, изъ котораго три корня найти должно, кои всѣ суть положительные; одинъ изъ нихъ $u = 9$, а

что

что бы сыскать другіе два, то раздѣли уравненіе на $u-9$, и выдѣль сіе новое $uu-4u+400=0$, или $uu=4u-400$, откуда найдемся $u=\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1600}{4}} = \frac{11 \pm 40}{2}$; слѣд. искомыя 3 корня будутъ $u=9$, $u=16$, $u=25$, откуда получимъ мы: I) $x=\frac{9}{2}$; II) $x=4$; III) $x=\frac{25}{4}$, и сіи суть корни буквъ p , q и r , такъ что $p=\frac{9}{2}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$; и $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$, то есть равно числу отрицательному; чего ради въ разсужденіи знаковъ корней \sqrt{p} , \sqrt{q} , \sqrt{r} должно смотрѣть на оное, а именно или одинъ изъ нихъ или всѣ три будутъ отрицательные. Но когда $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ и $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, то 4 корня предложеннаго уравненія будутъ:

$$\text{I)} x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$

$$\text{II)} x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$

$$\text{III)} x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$

$$\text{IV)} x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6, \text{ откуда произ-} \\ \text{ходящій сіи 4 множителя уравненія:}$$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0$, изъ
коихъ два первые даютъ $xx-3x+2$, а
два послѣдніе $xx+3x-18$, и сіи два
произведенія помноженные между собою
даютъ точно наше уравненіе.

781.

Осталось еще показать, какимъ
образомъ биквадратное уравненіе, въ ко-
торомъ второй членъ есть, пре-
вратить въ другое, въ которомъ бы его
не было; къ сему служишь слѣдующее
правило.

Пусть дано будетъ сіе генеральное
уравненіе $y^4 + ay^2 + byy + cy + d = 0$,
приложи къ y четвертую часть числа
при второмъ членѣ находящагося $\frac{1}{4}a$,
и напиши мѣсто онаго другую букву x ,
такъ чпобѣ $y + \frac{1}{4}a = x$, слѣд. $y = x - \frac{1}{4}a$,
откуда будетъ $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$; y^2
 $= x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$, и наконецъ

$$y^4 = x^4$$

$$\begin{array}{rcl}
 y^4 & = & x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a^2x + \frac{1}{24}a^4 \\
 + ay^3 & = & + ax^3 - \frac{1}{2}aaxx + \frac{1}{12}a^2x - \frac{1}{24}a^4 \\
 + byy & = & + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{12}aab \\
 + cy & = & + cx - \frac{1}{2}ac \\
 + d & = & + d
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 & - & \frac{1}{2}aaxx + \frac{1}{12}a^2x - \frac{1}{24}a^4 \\
 + bxx & - & \frac{1}{2}abx + \frac{1}{12}aab \\
 + cx & - & \frac{1}{2}ac + d
 \end{array} \} = 0$$

Гдѣ какъ видно втораго члена не находится, такъ что данное правило при немъ теперь употребивъ 4 корня x най-
ти можно, изъ коихъ пошомъ величины
 y сами собою означатся, ибо $y = x - \frac{1}{4}a$.

782.

Далѣе четвертой степени рѣшеніе алгебраическихъ уравненій не простирает-
ся, и всѣ старанія разрѣшать подоб-
нымъ образомъ уравненія 5той и выше-
шихъ степеней, или привести ихъ по
крайней мѣрѣ въ уравненія нижнихъ сте-
пеней были тщесны, такъ что не воз-
можно

можно ни коимъ образомъ данъ генеральнаго правила находить корни вышешихъ степеней, и все что въ разсужденіи сего ни изобрѣтено, не простирается далѣе, какъ только до такихъ уравненій, гдѣ рациональной корень содержится, которой чрезъ пробу легко найти можно, будучи извѣстно, что оной долженъ быть дѣлителемъ послѣдняго члена, съ коимъ также точно поступать надлежитъ, какъ уже въ кубическихъ и биквадратныхъ уравненіяхъ нами показано было.

783.

Не безнужно также здѣсь показать употребленіе сего правила въ уравненіяхъ имѣющихъ неизвлекаемые корни.

Пусть такое уравненіе будетъ
 $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8$. Прежде всего надлежитъ здѣсь исключить второй членъ, для чего къ числу y приложимъ еще четвертую часть числа при второмъ членѣ находящагося, т. е. $y - 2 = x$ и $y = x + 2$, по чему $yy = xx + 4x + 4$, $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$ и

$$\begin{array}{r}
 \text{и } y^4 = x^4 + 8x^2 + 24xx + 32x + 16 \\
 - 8y^2 = - 8x^2 - 48xx - 96x - 64 \\
 + 14y = + 14xx + 56x + 56 \\
 + 4y = + 4x + 8 \\
 - 8 = - 8 \\
 \hline
 x^4 - 10xx - 4x + 8 = 0 ;
 \end{array}$$

Сіе уравненіе сравнивъ съ генералною нашею формулою, найдемся $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; откуда заключаемъ $f = 5$, $g = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$, $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$; изъ чего видно что произведеніе \sqrt{pqr} будетъ положительное, и по сему кубическое уравненіе должно быть $z^3 - 5zx + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0$, изъ котораго должно найти три корня p , q и r .

78+

Въ семъ случаѣ съ самаго начала, должно изъ уравненія исключить дроби; положивъ $z = \frac{u}{2}$, будетъ $\frac{u^3}{8} - \frac{5u}{4} + \frac{1}{4} = 0$, и помноживъ на 8, выдетъ $u^3 - 10u + 1 = 0$; гдѣ всѣ корни суть положительные: и когда дѣлители послѣдняго

Толь II Н числа

члена суть 1 и 2, то положи сперва $u=1$. и будетъ $1-10+17-2=6$, и слѣд. не 0, а еслии положишь $u=2$, то выдетъ $8-40+34-2=0$; почему $u=2$ есть одинъ корень сего уравненія, а что бы найти и другіе два, то раздѣли оно уравненіе на $u-2$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 u-2 \overline{) u^3-10u+17u-2} \quad | \quad uu-8u+1 \\
 \underline{u^3-2uu} \\
 -8uu+17u \\
 \underline{-8uu+16u} \\
 +u-2 \\
 \underline{+u-2} \\
 0
 \end{array}$$

И произойдетъ $uu-8u+1=0$, или $uu=8u-1$, откуда оба остальные корня $u=4 \pm \sqrt{15}$; и когда $z=u$, то 3 корня кубическаго уравненія будутъ: I) $z=p=1$;

$$\text{II) } z=q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}; \quad \text{III) } z=r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}.$$

785.

Когда мы нашли p, q и r , то квадратные корни ихъ будутъ $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=$

$$\frac{\sqrt{8 \pm 2\sqrt{15}}}{2};$$

\sqrt{r}

$\sqrt{r} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$; выше же сего показано было, что квадратной корень изъ $(a + \sqrt{b})$, положивъ $\sqrt{(aa - b)} = c$, изображается такъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, то въ нашемъ примѣрѣ имѣя $a=8$ и $\sqrt{b}=2\sqrt{15}$ и $b=60$, откуда $c=2$, получимъ мы $\sqrt{(8+2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, и $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$; и когда $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{r} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

то четыре величины изображающія x будутъ слѣдующіе, зная что ихъ произведеніе должно быть положительное.

$$\text{I)} x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{II)} x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{III)} x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{IV)} x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ = -1 - \sqrt{3}$$

Понеже въ квадратномъ уравненіи было $y = x + 2$, то 4 ко, ня снаго будиѣ : I) $y = 3 + \sqrt{5}$; II) $y = 3 - \sqrt{5}$; III) $y = 1 + \sqrt{3}$; IV) $y = 1 - \sqrt{3}$.



ГЛАВА XVI.

О разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе.

756.

Ежели уравненіе не имѣетъ рациональныхъ корней, не смотря на то можно ли ихъ будиѣ изъяснить коренными знаками, или нѣтъ, какъ въ вышешихъ уравненіяхъ дѣлается, то должно довольствоваться изобрѣщеніемъ величины чрезъ приближеніе, такъ что къ точному знаменованію оная всегда ближе подходитъ можно, то есть, до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почесться можетъ. На сей конецъ различныя изобрѣтены средства, изъ коихъ значнѣйшія мы здѣсь изъяснить намерены.

787.

Первой способъ состоитъ въ томъ, когда величина одного корня довольно уже близка къ ищущему подходящъ, какъ нѣтъ еще ли извѣстно будещъ, что оной больше 4, а меньше 5, но тогда кладется величина сего корня $= 4 + p$, гдѣ p дѣйствительно означенъ дробь, когда же p будещъ дробь меньше 1, то квадратъ ея pp долженъ быть гораздо меньше, а кубъ p^3 и слѣдующія степени будучи уже и къ малы, что ихъ изъ выкладки опустить можно, потому что здѣсь ищется не самая величина p , но только ближайшая ей. И такъ когда дробь p ближайшая величина опредѣлена будещъ, то изъ того уже корень $4 + p$ гораздо точнѣе сыщется. Симъ образомъ опредѣлить можно корень еще точнѣе, употребляя предписанное дѣйствие до нѣхъ поръ, пока къ правдѣ подойдешь такъ близко, какъ пожелаешь.

Н 3

788.

Сие правило изъяснимъ мы самымъ легкимъ примѣромъ , и станемъ искать чрезъ приближеніе корень уравненія $xx=20$.

Здѣсь видно , что x больше $4x^b$, а меньше 5 пи и для того положивъ $x=4+p$, будемъ $xx=16+8p+pp=20$; но поелику pp очень мало, то выпустимъ его изъ уравненія, чтобъ получить $16+8p=20$, или $8p=4$, откуда будемъ $p=\frac{1}{2}$ и $x=4\frac{1}{2}$, которой уже къ правдѣ гораздо ближе подходитъ; посемъ положимъ еще $x=4\frac{1}{2}+p$, то видно, что p должна быть дробь гораздо меньше прежней, и слѣд. pp съ большимъ правомъ опущено быть можетъ; почему $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, или $9p=-\frac{1}{4}$, и $p=-\frac{1}{36}$, слѣд. $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$. Если бы понадобилось подойти къ правдѣ еще ближе, то положи $x=4\frac{17}{36}+p$, и будемъ $xx=20\frac{17}{36}+8\frac{17}{36}p=20$ и $8\frac{17}{36}p=-\frac{1}{36}$; умноживъ на 36 выдемъ $322p=-\frac{1}{36}=-\frac{1}{36}$, $p=-\frac{1}{36 \cdot 322}=-\frac{1}{11592}$, слѣд. $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5179}{11592}$. Сіе число къ точному корню уже такъ близко подходитъ,

что погрѣшность въ ничто почтется
можетъ.

759.

Дабы сіе показать вообще, то пусть
предложено будетъ уравненіе $xx = a$, и
извѣстно бы было, что x больше неже-
ли n , а меньше нежели $n+1$; тогда
положи $x = n + p$, такъ, что p дробь
означаетъ, и слѣд. pr какъ очень малая
дробь изъ уравненія отбрасывается; чего
ради получится $xx = nn + 2np = a$, слѣд.
 $2np = a - nn$ и $p = \frac{a - nn}{2n}$; почему $x = n$
 $+ \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$, и ежели n къ правдѣ уже
блиско подходило, то новая величина
 $\frac{nn + a}{2n}$ будетъ еще ближе къ оной. Сію
найденную величину положи опять мѣ-
сто n , и подойдешь къ правдѣ еще бли-
же, и когда сію положишь еще разъ
мѣсто n , то подойдешь уже несравненно
ближе къ правдѣ. Симвъ образомъ дѣйст-
віе сіе продолжать можно до тѣхъ поръ,
какъ пожелаешь. Пусть будетъ наприм.
 $a = 2$, или ищется квадратной корень
изъ 2: естли уже найдена довольно

Н 4

блиско

блиско къ почному корню подходящая величина, которая положена n , по $\frac{n^3+a}{3n}$ дастъ еще точнѣйшую величину.

И такъ пусть будетъ. I) $n=1$, то будетъ $x=\frac{5}{3}$

$$\text{II) } n=\frac{5}{3} \text{ — — — } x=\frac{17}{12}$$

$$\text{III) } n=\frac{17}{12} \text{ — — — } x=\frac{577}{384}$$

Сія послѣдняя величина такъ блиско къ $\sqrt[3]{2}$ подходитъ, что квадратъ ея $\frac{53^2+8^2}{268+84}$ только дробью $\frac{1}{268+84}$ больше 2 хъ.

790.

Подобнымъ образомъ поступая, надлежитъ ежели дано будетъ кубическое, или еще вышшее уравненіе.

Пусть дано будетъ сіе кубическое уравненіе $x^3=a$, или ищется $\sqrt[3]{a}$, и пусть оной будетъ почти n , то положи $x=n+p$, опустивъ pp и вышшую степень будетъ $x^3=3np+n^3=a$, слѣдов.

$$3np=a-n^3, \text{ и } p=\frac{a-n^3}{3n}, \text{ почему } x=\frac{2n^3+a}{3n}; \text{ и ежели } n \text{ уже блиско къ } \sqrt[3]{a} \text{ под-}$$

подходитъ , то сія формула будетъ къ
оному еще ближе , а положивъ сію но-
вую величину мѣсто n , бу еи къ
правдѣ подходитъ несравненно ближе,
и сіе дѣйствіе продолжать можно по же-
ланію.

Пусть будетъ напр. $x^3 = 2$, или ище-
тся $\sqrt[3]{2}$, къ коему число n уже близ-
ко подходитъ , то формула $\frac{2n^3 + 2}{3n^2}$ бу-
детъ къ нему еще ближе ,

положивъ I) $n = 1$ будетъ $x = \frac{4}{3}$

II) $n = \frac{4}{3}$ — — — $x = \frac{91}{72}$

III) $n = \frac{91}{72}$ — — — $x = \frac{162130896}{128634294}$.

791.

Сей способъ находить корни чрезъ
приближеніе , можно употребляти съ ра-
внымъ успѣхомъ во всѣхъ уравненіяхъ.
На сей конецъ пусть дано будетъ гене-
ральное кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx$
 $+ c = 0$, въ которомъ n уже близко къ

И 5

корню

корню его подходитъ ; положи $x = n - p$, и когда p должна быть дробь , то pp и прочія вышшяя степени онаго изъ уравненія вышустивъ получатся $xx = nn - 2np$ и $x^3 = n^3 - 3np$, откуда производитъ сіе уравненіе $n^3 - 3np + an - 2ap + bp - br + c = 0$. или $n^3 + an + bp + c = 3np + 2ap + br$, слѣдов. $p = \frac{n^3 + an + bp + c}{3n + 2a + b}$, и такъ мѣсто x получимъ слѣдующее точнѣйшее знаменованіе: $x = n - \frac{n^3 + an + bp + c}{3n + 2a + b} = \frac{2n^3 + an - c}{3n + 2a + b}$; и еслии сія новая величина положится опять мѣсто n , то получится величина , которая къ правдѣ еще ближе подходитъ.

792.

Пусть будетъ напр. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$, $b = 3$ и $c = -50$, слѣд. когда n вѣе близко къ корню подходитъ , то еще ближайшая величина будетъ $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3n + 4 + 3}$; но знамено-

ваніе

ваніе $x=3$ уже довольно близко къ настоящему корню подходящѣ , того ради положи $n=3$, и получится $x=\frac{47}{11}$, и если бы сію дробь положить еще вмѣсто n , то нашлася бы другая величина , къ точному корню гораздо ближе подходящая.

13.

Для вышшихъ степеней присовокупимъ адѣсь сей только примѣръ $x^5=6x+10$, или $x^5-6x-10=0$, гдѣ какъ видно 1 мала , а 2 велико. Пусть будетъ $x=n$, ближайшей величинѣ къ искомому корню, и положи $x=n+p$, то будетъ $x^5=n^5+5n^4p$, и слѣд. $n^5+5n^4p=6n+6p+10$, или $5n^4p-6p=6n+10-n^5$, откуда $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$; почему $x=\frac{4n^5+10}{5n^4-6}$,

положи теперь $n=1$, то будетъ $x=\frac{14}{-1}=-14$, которая величина къ рѣшенію даннаго вопроса совсѣмъ не годится, сіе происходитъ по той причинѣ, что ближайшая величина корню n , была взята

очень

очень мала; чего ради положи $n = 2$ и будемъ $x = \frac{139}{74} = \frac{69}{37}$, которая дробь къ правѣ уже гораздо ближе подходитъ, и если бы кто похотѣлъ трудъ на себя принявъ, положишь дробь $\frac{69}{37}$ мѣсто n , то сыскалась бы величина къ точному корню x уже несравненно близка.

794

Сие обыкновенное средство нѣхотѣть корня уравненія чрезъ приближеніе, во всѣхъ случаяхъ съ пользою употреблять можно.

Но сверхъ сего наміренны мы здѣсь показать еще другое средство, которое для легкости своей въ вычисленіи достоинно примѣчанія. Основаніе оного состоитъ въ томъ, что для каждаго уравненія надлежитъ сыскать рядъ чиселъ какъ: a, b, c, d и пр. которые бы были такою состоянія, что ежели каждой членъ раздѣлится на послѣдующей; въ частномъ бы выходила величина кор-

ня

ня пѣмѣ аккуратнѣе , чѣмѣ далѣе ссй
рядѣ чиселѣ продолжать будешь.

Положимѣ , что въ ссѣмѣ ряду чиселѣ дошли мы уже до членовѣ: p, q, r, s, t и пр. по $\frac{q}{p}$ должно дать корень x уже довольно аккуратно, или $\frac{q}{p}$ должно быть почти равно x ; также и $\frac{r}{q} = x$, откуда мы чрезѣ умноженіе получаемѣ $\frac{r}{p} = xx$, и когда еще $\frac{s}{r} = x$, то также будетѣ $\frac{s}{p} = x^3$, попомѣ еще $\frac{t}{s} = x$ а $\frac{t}{p} = x^4$ и такѣ далѣе.

795.

Для изъясненія сего начнемѣ съ квадратнаго уравненія $xx = x + 1$. Когда въ вышепомянутомѣ ряду найдется члены p, q, r, s, t и пр. по $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$, и откуда получаемѣ мы уравненіе $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, или $q + p = r$, также будетѣ $s = r + q$, и $t = s + r$, откуда мы познаемѣ, что каждый членѣ въ нашемѣ ряду есть сумма двухѣ предѣидущихѣ, почему помянутой рядѣ чиселѣ
можно

можно продолжать такъ далѣе, какъ похочется, ежели только два первые члена извѣстны будущи, которые можно брать по изволѣнію. Чего ради положивъ ихъ 0, 1, получится рядъ чиселъ

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и такъ далѣе. Въ семъ ряду каждой изъ отдаленныхъ членовъ раздѣленный на свой предъидущей, величину x тѣмъ точнѣе опредѣляетъ, чѣмъ далѣе рядъ продолженъ будетъ. Сначала ошибка, хотя и очень велика будетъ; однако она тѣмъ менше становится, чѣмъ далѣе рядъ продолжается. Сіи часъ онъ часу къ правдѣ приближающіяся величины для x идущи въ слѣдующемъ порядкѣ :

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \text{ и пр.}$$

изъ коихъ напр. $x = \frac{21}{13}$ даетъ $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{441}{169}$, и погрѣшность соотношенъ только изъ дроби $\frac{1}{169}$, а слѣдующія дроби къ правдѣ еще ближе подходятъ.

796.

Разсмотримъ теперь также и сіе уравненіе $xx = 2x + 1$. Понесже завсегда $x = \frac{q}{p}$ и $xx = \frac{r}{p}$, то получимъ мы $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, или $r = 2q + p$. Отсюда знаемъ мы, что каждой членъ два раза взятой вмѣстѣ съ своимъ предъидущимъ дастъ слѣдующей членъ; чего ради начавъ опять съ 0, 1, получимъ слѣдующей рядъ:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 и пр. и искомая величина x слѣдующими дробями часъ отъ часу аккуратнѣе опредѣлился $x = \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{2} ; \frac{17}{2} ; \frac{29}{2} ; \frac{70}{2} ; \frac{169}{2} ; \frac{408}{2}$ и пр. кои къ точной величинѣ $x = 1 + \sqrt{2}$ всегда приближаются, а отнявъ 1, слѣдующія дроби величину $\sqrt{2}$ дають часъ отъ часу точнѣе $\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{2} ; \frac{17}{2} ; \frac{29}{2} ; \frac{70}{2} ; \frac{169}{2} ; \frac{408}{2}$ и проч. изъ коихъ квадратъ $\frac{99}{70} = \frac{9801}{4900}$ только $\frac{1}{4900}$ больше нежели 2.

797.

Въ уравненіяхъ вышешихъ степеней, сей способъ равнымъ образомъ употреблять можно, такъ ежели бы дано было сіе кубическое уравненіе:

 x^3

$x^2 = xx + 2x + 1$, то положивъ $x = \frac{q}{p}$,
 $2x = \frac{r}{p}$ и $x^2 = \frac{s}{p}$, получится $s = r + 2q$
 $+ p$; откуда видно, какъ изъ трехъ
 членовъ p , q и r слѣдующей находить
 должно, въ которомъ случаѣ начальные
 числа опять взять можно по изволению,
 почему будемъ у насъ сей рядъ:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 и пр.
 откуда за слѣдующіе дроби всегда акку-
 ратнѣе величину x опредѣляютъ:

$x = \frac{0}{0} ; \frac{1}{0} ; \frac{1}{1} ; \frac{3}{1} ; \frac{6}{3} ; \frac{13}{6} ; \frac{28}{13} ; \frac{60}{28} ; \frac{129}{60}$
 и пр. первый изъ сихъ дробей удасно
 разнится отъ почнаго корня, но $x = \frac{60}{28}$
 $= \frac{15}{7}$ даетъ въ уравненіи $\frac{3175}{343} = \frac{215}{49} + \frac{20}{7} + 1 = \frac{7315}{343}$
 разность $\frac{15}{7}$.

798.

Здѣсь надлежитъ примѣчать, что
 не во всякомъ уравненіи сей способъ
 употреблять можно, особливо гдѣ вто-
 рого члена не находится, тамъ его упо-
 требить не лзя; ибо пусть будетъ напр.
 $xx = 2$, и положи $x = \frac{r}{p}$, и $xx = \frac{r}{p}$, то
 произойдетъ $\frac{r}{p} = 2$, или $r = 2p$, то есть,
 $r = 0q + 2p$, откуда произойдетъ сей
 рядъ чиселъ:

1,

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 и пр.
изъ коего ни чего заключить не можно;
ибо каждой послѣдующей членъ раздѣленъ
будучи на своей предъидущей даетъ $x=1$
или $x=2$. Но сію неспособность ош-
вертять можно положивъ $x=y-1$; ибо
тогда получится $y-2y+1=2$ или y
 $=2y+1$, и если здѣсь положимся $y=\frac{p}{q}$
и $y=\frac{r}{p}$, то выдетъ выше сего найден-
ное приближеніе.

799.

Симв же образомъ поступать надлежитъ и съ уравненіемъ $x^2 = 2$, изъ ко-
его хотя такого ряда чиселъ, который
бы опредѣлялъ намъ величину x найти
и не можно; однакожъ положивъ $x = y$
 $- 1$, выдетъ уравненіе $y^2 - 3y + 3y - 1 = 2$
или $y^2 = 3y - 3y + 3$, въ которомъ если
положимся $y = \frac{2}{p}$, $y = \frac{r}{p}$, $y^2 = \frac{s}{p}$, то вы-
детъ $1 = 3i - 3q + 3r$; откуда видно,
какъ изъ трехъ членовъ слѣдующей опре-
дѣлять должно. Первые 3 числа взявъ
по изволенію напр. 0, 0, 1, получится
Табл II. О О

0, 9, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 и пр. изъ коего два послѣдніе члена даютъ $y = \frac{22}{144}$ и $x = \frac{5}{4}$, кошорая дробь къ кубичному корню изъ 2 хъ довольно близко подходитъ; ибо кубъ $\frac{5}{4} = \frac{125}{64}$, а $2 = \frac{128}{64}$.

800.

При семъ способѣ еще примѣчать надлежитъ, что когда уравненіе имѣетъ раціональные корни, и начало ряда возмется такъ чпобъ отпуда вышли сіи корни, то каждой членъ онаго раздѣленъ будучи на свой предъидущій, дастъ тошъ же точно корень.

Что бы сіе показать, то пусть дано будетъ уравненіе $xx = x + 2$, коего одинъ корень $x = 2$, и для составленія ряда чиселъ изъ даннаго уравненія дана будетъ формула $x = q + ar$, и ежели начало его положится 1, 2, то получится рядъ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и пр. которой есть прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 2.

Тоже

Тоже самое явствуетъ изъ кубичнаго уравненія $x^3 = 3x^2 + 3x + 9$, котораго одинъ корень $x = 3$, и ежели начало ряда положиши 1, 3, 9, то изъ формулы $s = r + 3q + 9r$ найдется рядъ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. которой будетъ бѣжать прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 3.

801.

Ежели же ряда начало съ симъ корнемъ не сходно будетъ, то ошуда не слѣдуетъ, что чрезъ то всегда ближе къ нему подходить можно; ибо ежели уравненіе имѣетъ больше одного корня, то рядъ приближается всегда къ большому изъ оныхъ, а меньшаго иначе получить не лзя, какъ только когда начало ряда точно по оному разположится. Сіе примѣромъ лучше изъяснить можно,

Когда дано будетъ уравненіе $4x^2 = 4x - 3$, въ коемъ два корня суть $x = 1$ и $x = -\frac{3}{4}$, а формула для ряда чиселъ $r = 4q - 3r$, то положи начало ряда 1, 1, то

О 2

есть,

есть, для меньшаго корня, и будетъ весь рядъ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, и пр. когда же начало ряда поделится 1, 3, въ которомъ бѣдшей корень содержится, то весь рядъ будетъ :

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. въ которомъ всѣ члены корень 3 точно опредѣляютъ.

Если же начало ряда возмется по изволению, такъ что въ немъ меньшей корень не точно содержится, то рядъ приближается всегда къ большому корню 3, какъ въ слѣдующихъ рядахъ видно:

Начало 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 и пр.

— — — 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 и пр.

— — — 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095
и пр.

— — — 2, 1, -2, -11, -38, -118, -362, -1091,
-3278 и пр.

Гдѣ послѣдующіе члены раздѣлены будучи на предвидушіе всегда производятъ частныя, ближайшія большому корню, а меньшему никогда.

802.

Сей способъ можно употреблять и при такихъ уравненіяхъ, которыя бесконечно продолжаются. Въ примѣрѣ служить можетъ сѣ уравненіе:

$$x = x^{\infty} + x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{и пр.}$$

для котораго рядъ чиселъ долженъ быть такого состоянія, чпобъ каждой въ немъ числѣ равенъ былъ суммѣ всѣхъ предвѣдущихъ, откуда произойдетъ рядъ 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, и пр. изъ чего видно, что самой большой корень сего уравненія будетъ точно $x = 2$, что также показано быть можетъ и симъ образомъ: раздѣли данное уравненіе на x^{∞} , и получится

$x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{и проч.}$, что производилъ геометрическую прогрессию, коей сумма $= \frac{1}{x-1}$, такъ что $x = \frac{1}{x-1}$, будучи умножено на $x-1$ дастъ $x-1=1$ и $x=2$.

Сверхъ сихъ двухъ способовъ находить корни уравненія чрезъ приближеніе, есть еще и другіе, но которые по большей части или пространны, или не генеральны. Предъ всѣми такими способами заслуживаетъ преимущество съ начала изъясненной, какъ ипакъ, который во всѣхъ уравненіяхъ съ желаемымъ успѣхомъ употребленъ быть можетъ; другой же напротивъ того требуетъ иногда въ уравненіи нѣкоторое приуготовленіе, безъ котораго и употребити его нельзя, какъ уже мы въ предложенныхъ здѣсь примѣрахъ показали.

Конечъ четвертой части объ алгебраическихъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.



ЧАСТЬ ПЯТАЯ

о неопредѣленной аналитикѣ.



ГЛАВА I

О разрѣшеніи такихъ уравненій, въ которыхъ больше нежели одно неизвѣстное число находится.

804.

Изъ прежняго явствуетъ, какимъ образомъ одно неизвѣстное число изъ одного уравненія, два неизвѣстныхъ изъ двухъ, три изъ трехъ, четыре изъ четырехъ и такъ далѣе опредѣлять можно: такъ что всегда пребудетъ сколько уравненій, сколько неизвѣстныхъ чиселъ

О 4

опре-

опредѣлить должно, и тогда самой вопросъ будетъ опредѣленнымъ.

Естьли же изъ вопроса меньше выдетъ уравненій, нежели сколько неизвѣстныхъ чиселъ, то будущіе нѣкоторые изъ нихъ неопредѣленными и оставляются на наше произволеніе; почему такіе вопросы *неопредѣленными* называются, и составляютъ особливую аналитическую часть, которая *неопредѣленною Аналитическою* обыкновенно именуется.

855.

Понеже въ сихъ случаяхъ одно или больше неизвѣстныхъ чиселъ по изволению брать можно, то имѣютъ здѣсь мѣсто многія рѣшенія.

Но обыкновенно присовокупляется здѣсь еще сей договоръ, чиповъ искомыя числа были цѣлыя, да припомъ и положительныя или по крайней мѣрѣ рациональныя, чрезъ чипо число всѣхъ возможныхъ рѣшеній чрезмѣрно ограничивается, такъ чипо нѣкоторые не многія хотя часто же и бесконечно многія; но кои

НС

не столь легко видѣть можно, имѣютъ мѣсто, а иногда и совсѣмъ ни одного не возможно: почему сія аналитики часть совсѣмъ особливые пріемы пребуетъ и не мало слушитъ къ изощренію разума начинающихъ и большее имѣ проворство въ исчисленія приносить.

806.

Начнемъ съ самого легкаго вопроса и будемъ искать два числа, коихъ бы сумма равна была 10; при чемъ разумѣется, что сіи числа цѣлыя и положительныя быть должны.

Пусть оныя числа будутъ x и y , такъ что $x + y = 10$, откуда найдется $x = 10 - y$, и такъ y иначе опредѣлить нельзя, какъ только что оно цѣлое и положительное число быть должно, и по сему можно бы было взять вмѣсто y всѣ цѣлыя числа, отъ 1 безконечно многія; но понеже x также положительнымъ быть долженъ, то y болѣе 10 взять нельзя, потому что иначе былъ бы x

О 5

отри-

отрицательнымъ, и когда o также не долженъ входить въ выкладку, то самой большой y будетъ 9, ибо въ противномъ случаѣ былъ бы $x=0$; почему слѣдующія только рѣшенія мѣсто имѣютъ.

Когда $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, то $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но изъ сихъ 9 рѣшеній послѣднія 4 съ первыми 4мя одинаковы, и для того всѣхъ навсе 5 только разныхъ рѣшеній.

Если же бы потребны были 3 числа, коихъ бы сумма была 10, то надлежало бы только одно изъ найденныхъ здѣсь чиселъ раздѣлить еще на двѣ части, откуда вышло бы большее число рѣшеній,

807.

Понеже въ семъ никакой нѣтъ трудности, то приступимъ теперь къ нѣсколькимъ трудноватымъ вопросамъ.

Вопросъ. Раздѣлить 25 на двѣ части, изъ которыхъ бы одна на 2, а другая на 3 могла раздѣлиться?

Пусть

Пусть будетъ одна часть $2x$, а другая $3y$, то $2x + 3y = 25$, следовательно $2x = 25 - 3y$, раздѣливъ на 2 получимъ $x = \frac{25 - 3y}{2}$, откуда усматриваемъ мы въ первыхъ, что $3y$ должны быть меньше 25 пи и по сему y не можетъ быть больше 8 ми; исключивъ цѣлыя числа сколько возможно, будетъ $x = \frac{24 + 1 - 3y - y}{2}$, или $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$; и такъ $1 - y$, или $y - 1$ на 2 дѣлится должны, чего ради положи $y - 1 = 2z$, то $y = 2z + 1$ будетъ $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$, а понеже y не болѣе 8 ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чиселъ взять не можно, какъ только тѣ кои $2z + 1$ не больше 8 ми составляютъ, следовательно z долженъ быть меньше 4хъ, и по сему z не больше 3хъ взять можно, откуда слѣдуютъ рѣшенія :

$$\begin{array}{l}
 \text{положивъ } z = 0 \mid z = 1 \mid z = 2 \mid z = 3 \\
 \text{будетъ } y = 1 \mid y = 3 \mid y = 5 \mid y = 7 \\
 \text{и } x = 11 \mid x = 8 \mid x = 5 \mid x = 2
 \end{array}$$

И такъ искомыя двѣ части будутъ слѣдующія: I) $22+3$; II) $16+9$; III) $10+15$, IV) $4+21$.

808.

Вопросъ. Раздѣлить 100 на 2 части, такъ что первая на 7, а другая на 11 могла раздѣлиться?

Пусть будетъ первая $7x$, а другая $11y$, то должно $7x+11y=100$, откуда $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}=14$

$-y+\frac{2-4y}{7}$; и такъ $2-4y$, или $4y-2$, должны дѣлиться на 7, а когда $4y-2$ на 7 могутъ раздѣлиться, то и половина ихъ $2y-1$ также раздѣлится, чего ради положи $2y-1=7z$, или $2y=7z+1$: будетъ $x=14-y-2z$; но когда $2y=7z+1=6z+z+1$, выйдетъ $y=3z+\frac{z+1}{2}$.

Положивъ теперь $z+1=2u$, или $z=2u-1$ будетъ $y=3z+u$. Теперь вмѣсто u можно взять каждое цѣлое число, по которому бы ни x ни y отрицательными не были,

были, то получится $y=7$ и -3 , а $x=19$ и -11 . По первой формулѣ 7 и должно быть больше 3 хѣ, а по второй, 11 и меньше 19 ти, или и меньше нежели $\frac{19}{11}$, такъ что и не можетъ быть 2 , но оно также не можетъ, то остается одна только его величина $и=1$, откуда получится $x=8$ и $y=4$, следовательно обѣ искомыя части снѣ будутъ $Іа\ 56$, а $ІІа\ 44$.

8.9.

Вопросъ раздѣлить 100 на двѣ такія части, что ежели первую раздѣлишь на 5 , тобѣ осталось 2 , а когда другую раздѣлишь на 7 , въ остаткѣ чтобѣ было 4 ?

Когда отъ раздѣленія первой части на 5 въ остаткѣ должны быть 2 , то положи оную $5x+2$, и понеже другая часть раздѣленная на 7 должна дать остатокъ 4 , то пусть она будетъ $7y+4$, и такъ $5x+7y+6=100$, или $5x=94-7y=90+4-5y-2y$, почему $x=18-\frac{3}{5}y-\frac{2y+4}{5}$,
слѣдо-

слѣдовательно $4 - 2y$, или $2y - 4$, или половина сего $y - 2$ должна раздѣлиться на 5; чего ради положи $y - 2 = 5z$, или $y = 5z + 2$ будетъ $x = 16 - 7z$, откуда явствуемъ, что $7z$ должны быть меньше 16пи, слѣдовательно z меньше нежели $\frac{16}{7}$, и такъ не больше $2x$, почему вмѣстѣ мы здѣсь 3 рѣшенія;

Iе $z = 0$ даетъ $x = 16$ и $y = 2$, слѣдовательно объ искомыхъ части будутъ $82 + 18$.

IIе $z = 1$ будетъ $x = 9$ и $y = 7$, слѣдовательно объ части $47 + 53$.

IIIе $z = 2$ даетъ $x = 2$ и $y = 12$, почему объ части $12 + 88$.

810.

Вопросъ. Двѣ крестьянки имѣютъ вмѣстѣ 100 яицъ, одна говоритъ, ежели я свои по 8 ципать стану, то останется у меня 7, другая говоритъ, а когда я свои по 10 ципать буду, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7: спрашивается сколько каждая яицъ имѣла?

Поняе

Понеже число первой раздѣленное на 8 даетъ въ остаткѣ 7, а число другой раздѣленное на 10 также даетъ остатокъ 7, то положи число первой $= 8x + 7$, а другой $= 10y + 7$, то будетъ $8x + 10y + 14 = 100$, или $8x = 86 - 10y$, или $4x = 43 - 5y = 43 + 5 - 4y - y$; откуда найдется $x = 10 - y + \frac{1-y}{4}$; и такъ $3 - y$, или $y - 3$ на 4 дѣлится должно, чего ради положи $y - 3 = 4z$, будетъ $y = 4z + 3$ и $x = 10 - 4z - 3 = 7 - 5z$, слѣдовательно $5z$ должны быть меньше нежели 7 и такъ z меньше 2хъ, почему слѣдующія два рѣшенія выходящя :

Ис $z = 0$ даетъ $x = 7$ и $y = 3$, по сему у первой крестьянки было 63 яйца, а у другой 37.

Ис $z = 1$ даетъ $x = 2$ и $y = 7$ и такъ у первой было 23 яйца а у другой 77.

811.

Вопросъ. Въ нѣкоторой компаніи мужчины и женщины издержали вмѣстѣ 1000 копѣекъ, каждой мужчина заплатилъ 19 копѣекъ, а каждая женщина 13 коп. спрашивается

шивается сколько было мужчинъ и сколько женщинъ ?

Пусть будетъ число мужчинъ $= x$, а женщинъ $= y$, то получится сие уравненіе $19x + 13y = 1000$; изъ сего найдется $13y = 1000 - 19x$ или $13y = 988 - 12 - 13x - 6x$, слѣдовательно $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$, и такъ $12 - 6x$ или $6x - 12$ и шестая также онаго часть $x - 2$ должна дѣлиться на 13, что положи $x - 2 = 13z$ будетъ $x = 13z + 2$ и $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, или $y = 74 - 19z$, почему z долженъ быть меньше нежели $\frac{74}{19}$ и слѣдовательно меньше 4 хъ, откуда слѣдующія 4 рѣшенія мѣсто имѣютъ :

Іе $z = 0$ дастъ $x = 2$ и $y = 74$ такимъ образомъ было двое мужчинъ и 74 женщины, тѣ за платили 38 копѣекъ, а сіи 962 копѣйки.

Іе $z = 1$ дастъ число мужчинъ $x = 15$, а число женщинъ $y = 55$; тѣ издержали 285 коп., а сіи 715 коп.

Іе $z = 2$ дастъ число мужчинъ $x = 28$, а число женщинъ $y = 36$; тѣ исплатили 532 коп., а сіи 468 коп.

IVе $z=3$ дастъ число мужчинъ $x=41$,
а число женщинъ $y=17$, тѣ запла-
тили 779 коп.; а сіи 221. коп.

812

Вопросъ. Одинъ дворянинъ купилъ лошадей и быковъ вмѣстѣ за 1770 р. талеровъ, за каждую лошадь заплатилъ онъ 31 шал., а за каждого быка 21 р. талеръ, Спрашивается сколько было лошадей и сколько быковъ?

Пусть будетъ число лошадей x ; а быковъ y , то должно быть $31x+21y=1770$, или $21y=1770-31x=1764-10x-6$, слѣдовательно $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$. По сему должно $10x+6$, или также половина сего $5x+3$ раздѣлиться на 21. Положи $5x+3=21z$, будетъ $5x=21z-3$, слѣдовательно $y=84-x-2z$, но $x=\frac{21z+3}{5}$ или $=4z+\frac{z+3}{5}$; вмѣсто $z+3$ возьми $5u$ будетъ $z=5u-3$, $x=21u-12$ и $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$, и по сему и должно быть больше нуля, о; однакѣ

П

мень-

242 О НЕОПРЕДѢЛЕННОЙ

меньше 4хб , откуда получасмъ мы сіи
3 рѣшенія.

Iс $u=1$ даетъ число лошадей $x=9$, а
быковъ $y=71$, шѣ стояли 279 рейх.
талер., а сіи 1491 , вмѣстѣ 1770
р.талер.

IIс $u=2$ даетъ число лошадей $x=30$,
а быковъ $y=40$, шѣ стояли 930
р.тал. , а сіи 840 , вмѣстѣ 1770
рейхсшталер.

IIIс $u=3$ даетъ число лошадей $x=51$,
а быковъ $y=9$, шѣ стояли 1581
р.тал., а сіи 189 , вмѣстѣ 1770
рейхсшталеровъ.

813.

Предложенные по сіе мѣсто вопро-
сы ведупъ насъ къ уравненію $ax+by=c$,
гдѣ a, b и c цѣлыя и положитель-
ныя числа значащѣ , и вмѣсто x и y
также цѣлыя и положительные числа
требуются. Но если b будетъ отрица-
тельное, и уравненіе такой видъ при-
метъ $ax=by+c$, то будущѣ вопросы
совсѣмъ

совсѣмъ особливаго роду и могутъ имѣть безконечное множество рѣшеній, для которыхъ способъ надлежитъ изъяснить еще въ сей главѣ. Наилегчайше сего рода вопросы суть такіе: найди два числа, которыхъ бы разность была 6?

Положи меньшее $= x$, а большее $= y$ будетъ $y - x = 6$, слѣдовательно $y = 6 + x$; вѣдь съ ничто не препятствуемъ брать вмѣсто x всѣ возможные цѣлыя числа, и какія бы взяты ни были, то всегда y будетъ 6 тью больше; возми наприм. $x = 100$ будетъ $y = 106$, откуда явствуетъ, что безконечно многія рѣшенія быть могутъ.

814.

По семъ слѣдуютъ вопросы, гдѣ $c = 0$ и ax одному только by равно, и.е. ищется число, которое бы какъ на 5, такъ и на 7 могло раздѣляться; положи сіе число $= N$, то надлежитъ быть сперва $N = 5x$, потому что число N на 5 дѣлится должно. а полнымъ $N = 7y$, понеже сіе число также и на 7 дѣлится-

ся долженствуетъ. Отсюда получится $\zeta x = 7y$, слѣдовательно $x = 7z$; но понеже 7 на ζ раздѣлиться не могутъ, то должно y на оное раздѣлиться, и такъ положи $y = \zeta z$, будетъ $x = 7z$; слѣдовательно искомое число $N = 35z$, гдѣ вмѣсто z каждое цѣлое число брать можно, такъ что вмѣсто N безконечно многія числа найдутся, кои суть 35, 70, 105, 175, 210 и проч.

Если бы еще сверхъ сего число N на 9 раздѣлить можно было, то было бы сперва $N = 35z$, а потомъ $N = 9u$, и отсюда $u = \frac{35z}{9}$ по чему видно, что z на 9 дѣлиться долженъ, и такъ пусть будетъ $z = 9s$, будетъ $u = 35s$, а искомое число $N = 315s$.

815.

Больше трудности бываетъ, ежели число s не 0, такъ когда бы было $\zeta x = 7y + 3$. Сие уравненіе выходитъ, когда такое число N ищется, которое бы сперва на 5 дѣлилось, а если бы оно же раздѣ-

раздѣлится на 7, то осталось бы 3. Ибо тогда надлежитъ быть $N = 5x$, а потомъ $N = 7y + 3$, и для того будетъ $5x = 7y + 3$, слѣдовательно $x = \frac{7y+3}{5} = y + \frac{y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$; положивъ $2y + 3 = 5z$ будетъ $x = y + z$, но $2y + 3 = 5z$, или $2y = 5z - 3$ будетъ $y = \frac{5z-3}{2}$, или $= 2z + \frac{z-3}{2}$; возми теперь $z - 3 = 2u$ будетъ $z = 2u + 3$, $y = 5u + 6$ и $x = y + z = 7u + 9$, слѣдовательно искомое число $N = 35u + 45$, гдѣ вмѣсто u всѣ цѣлыя числа взяты быть могутъ, да и самыя отрицательныя; чтобъ только N было положительное, что учинится здѣсь ежели $u = -1$; ибо тогда выйдетъ $N = 10$, слѣдующія же числа получатся, когда къ оному завсегда придавать будешь 35, и по сему искомыя числа суть 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 и прочая.

816.

Рѣшеніе такихъ вопросовъ основано на содержаніи обоихъ чиселъ, на которыя дѣлится должно, и по свойству оныхъ рѣшеніе бываеъ иногда короче,

П 3

иногда

иногда пространнѣе; слѣдующей коронкой разрѣшится.

Найти число, которое когда раздѣлится на 6, останется 6, а раздѣливъ оное на 13 въ остаткѣ будетъ 3?

Пусть будетъ сѣ число N , то во-первыхъ $N = 6x + 2$, а потомъ $N = 13y + 3$, и такъ $6x + 2 = 13y + 3$, и $6x = 13y + 1$, откуда $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$; положи $y + 1 = 6z$, получившися $y = 6z - 1$ и $x = 2y + \frac{y+1}{6} = 13z - 2$, слѣдовательно иско-мое число будетъ $N = 78z - 10$, и такія числа будутъ слѣдующія: 68, 146, 224, 302, 380 и проч., которыя идущъ въ арифметической прогрессіи, коей разность есть $78 = 6 \cdot 13$, и такъ ежели одно изъ сихъ чиселъ будетъ извѣстно, то всѣ прочія легко найдутся; ибо надлежитъ только къ онымъ придавать завсегда 78, или изъ онаго вычитать сколько возмо-жно будетъ.

817.

Труднее сего примѣръ слѣдующій быть можетъ: сыскать число N , кото-
рое

рое будучи раздѣлено на 39 дастъ въ остаткѣ 16, а на 56 раздѣленное дастъ остатокъ 27

Воисрвыхъ должно быть $N = 39p + 16$, а попомѣ $N = 56q + 27$, откуда выдѣль $39p + 16 = 56q + 27$, или $39p = 56q + 11$ и $p = \frac{56q+11}{39} = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$, такъ, что $r = \frac{17q+11}{39}$, отсюда будетъ $39r = 17q + 11$, и $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$, такъ что $s = \frac{5r-11}{17}$, или $17s = 5r - 11$; по сему будетъ $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{s+11}{5} = 3s + t$, такъ что $t = \frac{s+11}{5}$, и ии $5t = 2s + 11$, слѣдовательно будетъ $s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$, такъ что $u = \frac{t-11}{2}$ и $t = 2u + 11$; когда теперь больше уже дробей не попадется, то можно взять u по изволению, и отсюда наизворотъ получасмъ мы слѣдующія опредѣленія :

$$t = 2u + 11$$

$$s = 2t + 11 = 5u + 22$$

$$r = 3s + t = 17u + 77$$

П 4

$$q = 2r$$

$$q = ar + s = 39u + 176$$

$$p = q + r = 56u + 253$$

и наконецъ $N = 39.56u + 9883$.

Но что бы самое меньшее число вмѣсто N наипи, то положи $u = -4$ будетъ $N = 1147$, положивъ $u = x - 4$ будетъ $N = 2184x - 8736 + 9883$, или $N = 2184x + 1147$. Сии числа дѣлаютъ арифметическую прогрессию, которой первой членъ есть 1147, а разность $= 2184$, самыя же числа будутъ 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 и проч.

818.

Для упражненія присоединимъ еще нѣсколько примѣровъ.

Вопросъ. Въ одной компаніи были мужчины и женщины; каждой мужчина издержалъ 25, каждая женщина 16 коп. и нашлось послѣ, что женщины вмѣстѣ олною копѣйкою больше заплатили, нежели мужчины, спрашивается сколько было мужчинъ и женщинъ?

поло-

Положимъ число женщинъ было $= p$, а мужчинъ $= q$, то женщины издержали $16p$, а мужчины $25q$: чего ради должно быть $16p = 25q + 1$, отсюда найдется $p = \frac{25q+1}{16}$
 $= q \frac{+ 9q+1}{16} = q + r$, такъ что $r = \frac{9q+1}{16}$,
 слѣдовательно $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9}$
 $= r + s$, такъ что $s = \frac{7r-1}{9}$, или $9s = 7r - 1$;
 откуда $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, такъ что $t = \frac{2s+1}{7}$ или $7t = 2s + 1$,
 слѣдовательно $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2}$
 $= 3t + u$, такъ что $u = \frac{t-1}{2}$, или $2u = t - 1$,
 по чему $t = 2u + 1$, отсюда наизво-
 ротъ получасмъ мы

$$t = 2u + 1$$

$$s = 3t + u = 7u + 3$$

П 5

 $r = s$

$$r = s + t = 9u + 4$$

$$q = r + s = 16u + 7$$

$p = q + r = 25u + 11$ по сему было женщинъ $= 25u + 11$, а мужчинъ $= 16u + 7$, гдѣ вмѣсто u , всякое цѣлое число взять можно: меньшія числа съ слѣдующими будутъ такія:

число женщинъ $= 11, 36, 61, 86, 111$ и пр.
 — мужчинъ $7, 23, 39, 55, 71$ и пр.

по первому рѣшенію въ самыхъ меньшихъ числахъ женщины издержали 176 коп., а мужчины 175 коп., слѣдовательно женщины одною копѣею больше израспили, нежели мужчины.

819.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадей и быковъ, за каждую лошадь заплатилъ 31 рейхсталеръ, а за каждого быка 20 р. талеровъ, и нашлось, что всѣ быки вмѣстѣ 7мью р. талерами стоили больше, нежели лошади. Спрашивается сколько было быковъ и лошадей?

Пусть

Пусть будетъ число быковъ $b = p$, а лошадей $= q$, по должно $20p = 31q + 7$, откуда $p = \frac{31q + 7}{20} = q + \frac{11q + 7}{20} = q + r$, по сему $20r = 11q + 7$, и $q = \frac{20r - 7}{11} = r + \frac{9r - 7}{11}$, по сему $11s = 9r - 7$ и $r = \frac{11s + 7}{9} = s + \frac{2s + 7}{9} = s + t$, по сему $9t = 2s + 7$ и $s = \frac{9t - 7}{2} = 4t + \frac{t - 7}{2} = 4t + u$, по сему $2u = t - 7$ и $t = 2u + 7$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$

$$r = s + t = 11u + 35$$

$$q = r + s = 20u + 63 \text{ число лошадей,}$$

$$p = q + r = 31u + 98 \text{ число быковъ.}$$

Отсюда

Отсюда найдутся меншія положительныя числа, вѣсипо p и q , когда положится $n = -3$, большія же числа увеличиваются въ арифметической прогрессіи, какъ слѣдуетъ :

число быковъ 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191
222, 253 и проч.

число лошадей 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123
143, 163, и проч.

820.

Когда мы въ семъ примѣрѣ рассмотримъ, какимъ образомъ буквы p и q изъ слѣдующихъ опредѣляются, то легко усмотрѣть можно, что сіе ошѣ содержанія чиселъ 31 и 20 зависятъ, а особливо на томъ содержаніи, по которому обыкновенно ищутъ самаго большаго общаго сихъ обѣихъ чиселъ дѣлителя, какъ изъ слѣдующаго явствуютъ :

$$\begin{array}{r}
 20 \overline{) 31} \quad 1 \\
 \underline{20} \\
 11 \overline{) 20} \quad 1 \\
 \underline{11} \\
 9 \overline{) 11} \quad 1 \\
 \underline{9} \\
 2 \overline{) 9} \quad 4 \\
 \underline{8} \\
 1 \overline{) 2} \quad 2 \\
 \underline{2}
 \end{array}$$

Здѣсь видно , что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ опредѣленіяхъ буквъ, *p*, *q*, *r*, *s* и проч. выходятъ: и съ первою буквою на правой рукѣ связываются , а послѣдняя остается всегда одинака ; въ послѣднемъ же уравненіи выходить прежде всѣхъ число 7 и припомъ съ знакомъ $+$ потому , что послѣднее опредѣленіе есть плюсовое. Еслили же бы число оныхъ было четное , тогда бы -7 , поставивъ надлежало. Сіе будетъ яснѣе изъ слѣдующей таблички , гдѣ напередъ

354 О НЕОПРЕДѢЛЕННОЙ

передъ раздробленіе чиселъ 31 и 20, а потомъ опредѣленія буквъ p, q, r и пр. представлены.

$$\begin{array}{l|l} 31 = 1. 20 + 11 & p = 1. q + r \\ 20 = 1. 11 + 9 & q = 1. r + s \\ 11 = 1. 9 + 2 & r = 1. s + t \\ 9 = 4. 2 + 1 & s = 4. t + u \\ 2 = 2. 1 + 0 & t = 2u + \dots \end{array}$$

821.

По сему способу представленъ быть можетъ прежней примѣръ въ 14 статьѣ, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l|l} 56 = 1. 39 + 17 & p = 1. q + r \\ 39 = 2. 17 + 5 & q = 2. r + s \\ 17 = 3. 5 + 2 & r = 3. s + t \\ 5 = 2. 2 + 1 & s = 2. t + u \\ 2 = 2. 1 + 0 & t = 2u + 1x \end{array}$$

822.

Симъ образомъ въ состояніи мы рѣшить всѣ такіе примѣры вообще.

Пусть

Пусть будетъ дано сіе уравненіе $br = aq + n$, гдѣ a , b и n извѣстны; здѣсь тоже дѣйствіе производить надлѣзаетъ, какъ будто бы найти должно было самого большаго общаго дѣлителя чиселъ a и b , изъ коихъ p и q , чрезъ слѣдующія буквы опредѣлены будутъ, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l|l} \text{пусть будетъ } a = Ab + c & p = Aq + r \\ b = Bc + d & q = Br + s \\ c = Cd + e & r = Cs + t \\ d = De + f & s = Dt + u \\ e = Ef + g & t = Eu + v \\ f = Fg + o & u = Fv + n \end{array}$$

Здѣсь въ послѣднемъ опредѣленіи беремъ $+n$, когда число опредѣлений нечетное; напротивъ того $-n$, ежели оное будетъ четное. Такимъ образомъ можно теперь всѣ такіе вопросы рѣшить весьма скоро, изъ коихъ мы предложимъ нѣкоторые для примѣру.

873.

Вопросъ. Сыскать число, которое когда раздѣлится на 11, дастъ въ остаткѣ

къ 3. а раздѣленное на 19, дастъ остатокъ 5 ?

Пусть будетъ сіе число N , то во-первыхъ $N = 11r + 3$, а потомъ также $N = 19q + 5$: чего ради будетъ $11r + 3 = 19q + 5$, или $11r = 19q + 2$, откуда слѣдующая составится табличка:

$$\begin{array}{l|l} 19 = 1 \cdot 11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1 \cdot 8 + 3 & q = r + s \\ 8 = 2 \cdot 3 + 2 & r = 2s + t \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 & s = t + u \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 & t = 2u + 2 \end{array}$$

гдѣ u по изволенью взять можно, а оппудъ уже обратнымъ порядкомъ предвидуція буквы опредѣляюся, какъ слѣдуетъ:

$$t = 2u + 2$$

$$s = t + u = 3u + 2$$

$$r = 2s + t = 8u + 6$$

$$q = r + s = 11u + 8$$

$$p = q + r = 19u + 14$$

отсюда

отсюда получается искомое число $N = 209u + 157$ и такъ самое меньшее число вмѣсто N есть 157.

824.

Вопросъ. Ищется число N , которое какъ и прежде раздѣленное на 11 дастъ въ остаткѣ 3, а раздѣленное на 19 дастъ остатокъ 5, и еслили оно же раздѣлится на 29 тобѣ оспалось 10?

По послѣднему положенію должно быть $N = 29p + 10$ и когда первые два договора уже вычислены, то нѣз оныхъ быть надлежитъ, какъ уже выше найдено $N = 209u + 157$, вмѣсто чего поставимъ мы $N = 209q + 157$, чего ради будемъ $29p + 10 = 209q + 157$ или $29p = 209q + 147$, откуда слѣдующее дѣйствіе предпріять надлежитъ:

$209 = 7 \cdot 29 + 6$	слѣд:	$p = 7 \cdot q + r$
$29 = 4 \cdot 6 + 5$		$q = 4 \cdot r + s$
$6 = 1 \cdot 5 + 1$		$r = 1 \cdot s + t$
$5 = 5 \cdot 1 + 0$		$s = 5 \cdot t - 147.$

Толк II.
р
От.

Отсюда возвращаемся назадъ слѣдующимъ образомъ.

$$s = 5t - 147$$

$$r = s + t = 6t - 147$$

$$q = 4r + s = 29t - 735$$

$$p = 7q + r = 209t - 5292$$

И такъ $N = 6061t - 153458$, самое меньшее число найдется, когда положимъ $t = -26$, тогда будетъ $N = 4128$.

825.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что ежели такое уравненіе такъ, $br - aq + n$ разрѣшить должно будетъ, то оба числа a и b общаго дѣлителя кромѣ 1 имѣть не должны; ибо въ противномъ случаѣ былъ бы вопросъ невозможной, ежели бы число n тогожъ общаго дѣлителя не имѣло. Такъ когда наприм. $9r = 15q + 2$, гдѣ 9 и 15 общаго дѣлителя 3 имѣютъ, но на котораго 2 раздѣлиться не можетъ, того ради не лзя рѣшить сего вопроса, потому что $9r - 15q$ завсегда на 3 раздѣляясь и слѣдовательно ни когда 2 быть

не

не можетъ. Если же бы въ семъ случаѣ $n=3$ или 6 и проч. , то былъ бы вопросъ совсѣмъ возможной и надлежало бы уравненіе раздѣлить на 3 , то бы вышло тогда $3p=5q+1$, что по прежнему правилу легко рѣшить можно. Почему явствуетъ , что оба числа a и b никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 имѣть не должны , и что предписанное правило ни въ какихъ другихъ случаяхъ имѣть мѣста не можетъ.

826.

А чтобы сіе яснѣе показать , то рассмотримъ натуральнымъ порядкомъ уравненіе $9p=15q+2$, гдѣ будетъ $p=\frac{15q+2}{9}=q+\frac{6q+2}{9}=q+r$, такъ что $9r=6q+2$, или $6q=9r-2$, по чему $q=\frac{9r-2}{6}=r+\frac{3r-2}{6}=r+s$, такъ что $3r-2=6s$, или $3r=6s+2$; откуда $r=\frac{6s+2}{3}=2s+\frac{2}{3}$, что , какъ явствуетъ , никогда цѣлое число быть не можетъ ,

Р 2

ибо

ибо z неотмѣнно цѣлое число быть должно ; и такъ видно, что такіе вопросы по ихъ свойству не возможны.



ГЛАВА II.

О правилѣ такъ называемомъ слѣпомъ, гдѣ изъ двухъ уравненій 3 или больше неизвѣстныхъ чиселъ опредѣляются.

827.

Въ предъидущей главѣ видѣли мы , ка-кимъ образомъ изъ одного уравненія два неизвѣстныя числа опредѣлять должно, такъ чтобы оныя были цѣлыя и положи-тельныя . Но ежели предложены бу-дутъ два уравненія , и вопросъ должнъ быть неопредѣленной, то надлежитъ быть больше , нежели двумъ неизвѣстнымъ числамъ ; такіе вопросы случаю-ся въ проситыхъ ариѳметическихъ книгахъ и рѣшаяся по правилу слѣпому , ко-торого основаніе показать мы здѣсь на-мѣрены.

828.

828.

Начнемъ съ самаго примѣра.

Вопросъ. 30 человѣкъ мужчинъ, женщинъ и робятъ издержали въ трактирѣ 50 рейхсгалеровъ, каждой мужчина заплашилъ 3 р. талера, каждая женщина 2 р. талера, каждой ребенокъ 1 р. талеръ. Спрашивается сколько было мужчинъ, женщинъ и робятъ?

Пусть будетъ число мужчинъ $= p$, женщинъ $= q$, а робятъ $= r$, то получаются слѣдующія два уравненія: I) $p + q + r = 30$; II) $3p + 2q + r = 50$, изъ коихъ 3 буквы p, q и r въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ опредѣлить должно. Изъ перваго уравненія будетъ $r = 30 - p - q$; чего ради $p + q$ должны быть меньше 30 пи. Сію величину подставивъ вмѣсто r въ другое уравненіи выдѣлѣмъ $2p + q + 30 = 50$, слѣдовательно $2p + q = 20$; и такъ $q = 20 - 2p$, а $p + q = 20 - p$, что само по себѣ меньше 30 пи, теперь вмѣсто p всѣ числа брать можно, кои не больше 10 пи, по чему слѣдующія выйдутъ рѣшенія.

Р 3

число

число мужчин $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$

— женщин $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,$

— и ребят $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,$

отбросивъ первыя и послѣднія, останутся еще 9 истинныхъ рѣшеній,

829.

Другой полпрось. Нѣкто купилъ 100 разнаго рода скотины, свиней, козъ и барановъ за 100 рейхспалеровъ, за одну свинью давалъ $3\frac{1}{2}$ р. талеровъ, за козу $4\frac{1}{2}$ р. талер., за барана $\frac{1}{2}$ р. тал. спрашивается, сколько каждаго роду было?

Пусть будетъ число свиней $= p$, козъ $= q$, барановъ $= r$, то выдуть слѣдующія два уравненія.

I. $p + q + r = 100$; II) $3\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r = 100$. Съ послѣднее уравненіе для избѣжанія дробей помножь на 2, выдешь $7p + 9q + r = 200$, изъ перваго уравненія будетъ $r = 100 - p - q$, котораго величину поставивъ во второмъ уравненіи, получится $18p + 5q = 300$, или $5q = 300 - 18p$ и $q = 60 - \frac{18}{5}p$, слѣдовательно $18p$
дол.

должны на 5 раздѣлиться, или 5 какъ мно-
жителя въ себѣ заключать должны, и такъ
положи $p = 5s$ будетъ $q = 60 + 18s$ и
 $r = 13s + 40$, гдѣ вмѣсто s произвольное
цѣлое число взять можно, но такъ
чтобъ q не было отрицательнымъ; чего
ради s не больше 3хъ быть долженъ, и
слѣдовательно когда о такъже исключает-
ся, то слѣдующія только 3 рѣшенія
мѣсто имѣютъ, а именно:

когда	$s =$	1,	2,	3
будетъ	$p =$	5,	13,	15
	$q =$	42,	24,	16
	$r =$	53,	66,	79.

830.

Когда кто такіе примѣры самъ
предлагать пожелаетъ, то прежде всего
на то смотрѣть надлежитъ, чтобъ бы-
ли оныя возможны, а что бы сіе узнать,
то надлежитъ примѣчать слѣдующее:

Пусть будутъ оба уравненія, ка-
кіе мы по сіе мѣсто имѣли, такъ пред-

ставлены Ie) $x+y+z=a$; II) $fx+gy+bz=b$, гдѣ f, g, b , такъ какъ a и b известны; пусть теперь между числами f, g и b первое будетъ наибольшее, а b наименьшее; когдажъ $x+y+z=a$, то $fx+fy+fz=fa$; а $fx+fy+fz$ больше нежели $fx+gy+bz$, по чему fa должно быть больше нежели b , или b меньше нежели fa ; а $bx+by+bz=ab$ и $bx+by+bz$ въподлинно меньше нежели $fx+gy+bz$, то и ab должно быть меньше нежели b , или b больше нежели ab . Слѣдовательно когда число b , не меньше fa и при томъ не больше ab , то вопросъ всегда не возможной.

Сей договоръ обыкновенно также предлагается и слѣдующимъ образомъ: число b содержалось въ предѣлахъ fa и ab , сверхъ сего чтибъ оно не очень близко подходило къ обоимъ предѣламъ; ибо иначе остальные буквы опредѣлены быть не могутъ.

Такъ

вѣсомъ въ 30 марокъ , которая должна быть 12 лотовая.

Спрашивается сколько марокъ каждаго серебра взять ему надлежитъ ?

Положимъ что взялъ онъ изъ перваго серебра x марокъ , изъ другаго y , а изъ третьяго z марокъ , то должно быть $x + y + z = 30$, что составляетъ первое уравненіе ; потому каждая марка перваго сорта содержитъ 14 лотовъ хорошаго серебра , то x марокъ содержать будутъ $14x$ лотовъ серебра , подобнымъ образомъ y марокъ втораго рода содержатъ $11y$ лотовъ серебра и z марокъ , третьяго рода содержатъ $9z$ лотовъ серебра ; почему весь кусокъ серебра содержать будетъ $14x + 11y + 9z$ лотовъ , а понеже оной вѣсимъ 30 марокъ , изъ которыхъ каждая содержать должна 12 лотовъ серебра , то надлежитъ количеству серебра въ ономъ кускѣ быть 360 лотовъ ; откуда сіе второе уравненіе выходитъ $14x + 11y + 9z = 360$: изъ сего вычтя первое уравненіе 9 разъ взятое ,

и. е.

т. е. $9x + 9y + 9z = 270$, останется $5x + 2y = 90$; откуда и x и y опредѣлить должно, и припомъ въ цѣлыхъ числахъ, мо $z = 30 - x - y$, а изъ другаго уравненія получимъ $2y = 90 - 5x$ и $y = 45 - \frac{5x}{2}$, положивъ $x = 2u$ найдемъ $y = 45 - 5u$ и $z = 3u - 15$. Слѣдовательно u должно быть больше 4хъ, хотя и меньше 10ти. Откуда выходятъ слѣдующія рѣшенія:

$u = 5,$	$6,$	$7,$	$8,$	$9.$
$x = 10,$	$12,$	$14,$	$16,$	$18.$
$y = 20,$	$15,$	$10,$	$5,$	$0.$
$z = 0,$	$3,$	$6,$	$9,$	$12.$

832.

Иногда случаются больше нежели 3 неизвѣстныя числа, гдѣ рѣшеніе такимъ же образомъ дѣлается, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

Вопросъ. Нѣкто купилъ сотню скотины за 100 рейхсгалеровъ, каждого быка за 10 р.тал.; каждую корову за 5 р.тал.; каждого шеленка за 2 р.талер.; каждую овцу

овцу за $\frac{1}{2}$ р шалера. Спрашивается, сколько было быковъ, коровъ, телятъ и овецъ.

Пусть будетъ число быковъ $= p$, коровъ $= q$, телятъ $= r$ и овецъ $= s$, то первое уравнение будетъ $p + q + r + s = 100$, и второе $15p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, которое для избѣжанія дробей помножено на 2, дастъ $20p + 10q + 4r + s = 200$, изъ сей вычти первое уравненіе, выдѣлѣ $19p + 9q + 3r = 100$, отсюда $3r = 100 - 19p - 9q$ и $r = 33\frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, или $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1}{3}$, по чему $1 - p$, или $p - 1$ должно дѣлиться на 3; и такъ возьми $p - 1 = 3t$, то будетъ, какъ слѣдуетъ

$$p = 3t + 1$$

$$q = q$$

$$r = 27 - 19t - 3q$$

$$s = 72 + 2q + 16t$$

И такъ $19t + 3q$ должны быть меньше, нежели 27. Здѣсь можно теперь взять q и t по произволѣнію, съ симъ только договоромъ, чтобъ $19t + 3q$ не былъ
больше.

больше 27ми и по сему слѣдующіе случаи разсмотримъ мы имѣемъ.

I когда $t=0$	II когда $t=1$	t нельзя взять
по буденіи $p=1$	буденіи $p=4$	$=23$ ибо въ
$q=q$	$q=q$	противномъ
$r=27-3q$	$r=8-3q$	случаѣ вышло
$s=72+2q$	$s=88+2q$	бы t отрица-
		тельное.

Въ первомъ случаѣ q не должно быть больше 9, а во второмъ не больше 2хъ; и такъ изъ обоихъ случаевъ получаемъ мы слѣдующія рѣшенія.

Изъ первого случая выходятъ сіи 10 рѣшеній, какъ

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

а изъ другого случая сіи 3 рѣшенія

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92.

Слѣдовательно всѣхъ навсе 13 рѣшеній;
но когда о включится, то будетъ
только 10.

833.

Способъ рѣшенія бываетъ всегда
одинаковъ, хотя бы въ первомъ уравне-
нїи буквы на данныя числа и помножены
были, какъ изъ слѣдующаго примѣра
явствуетъ.

Вопросъ. Найди 3 такія числа, изъ
которыхъ когда первое помножится на
3, другое на 5, а третье на 7, тобъ
сумма произведеній была 160; когда же
первое помножится на 9, другое на 25
и третье на 49, тобъ сумма произведе-
ній была 2920?

Пусть будетъ первое число $=x$,
другое $=y$, третье $=z$, то выдутъ
сн

сйн два уравненія I) $3x + 5y + 7z = 560$;
 II) $9x + 25y + 49z = 2920$, нѣ въ втораго
 вымпи первое трижды взятое, а имянно
 $9x + 15y + 21z = 1680$ останется $10y$
 $+ 28z = 1240$, или раздѣливъ на 2 бу-
 детъ $5y + 14z = 620$; откуда $y = 124$
 $-\frac{14z}{5}$, слѣдовательно z долженъ дѣлиться
 на 5; и такъ положи $z = 5u$, бу-
 детъ $y = 124 - 14u$, которыя знаменованія
 поставивъ въ первомъ уравненіи вмѣсто
 z и y ладутъ $3x - 35u + 620 = 560$, или
 $3x = 35u - 60$, и $x = \frac{35u}{3} - 20$, чего ради
 взявъ $u = 3t$ получимся наконецъ такое
 рѣшеніе $x = 35t - 20$; $y = 124 - 42t$ и z
 $= 15t$, гдѣ вмѣсто t произвольныя цѣ-
 лыя числа брать можно; но такъ что-
 бы t было больше 0, но меньше 3 хъ,
 откуда получаются сйн два рѣшенія:

Ie) когда $t = 1$, будетъ $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$

IIe) ежели $t = 2$, получимся $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.



ГЛАВА III

О составныхъ неопредѣленныхъ уравненійхъ , въ которыхъ первая только степень неизвѣстнаго числа находится.

834

Теперь приступимъ мы къ такимъ уравненіямъ, гдѣ два неизвѣстныя числа ищущся , и каждое не одно , какъ прежде , но или между собою помножены, или до нѣкоторой вышшей степени возвышены попадаютъ, ежели между тѣмъ другого числа только первая степень находится. Такія уравненія имѣютъ вообще слѣдующую формулу :

$a + bx + cy + dxx + exy + fx^2 + gxy + bx^2 + kx^2y$ и проч. $= 0$ гдѣ у первой только степени попадаетъ, и слѣдовательно легко опредѣленъ быть можетъ. Но опредѣленіе должно быть такое , чтобъ вмѣсто x и y вышли цѣлыя числа: такіе случаи шанемъ мы теперь разсматривать и начнемъ съ самыхъ легкихъ.

835.

835.

Найти два числа, которыхъ когда сумма придастся къ ихъ произведенію, выдѣлѣтъ 79? Пусть будутъ два требуемые числа x и y , то должно быть $xy + x + y = 79$, откуда получаемъ мы $xy + y = 79 - x$ и $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$; по чему явствуемъ, что $x+1$ долженъ быть дѣлитель 80 пи: но понеже 80 имѣетъ многихъ дѣлителей, потому изъ каждаго найдется величина x , какъ изъ слѣдующаго видно:

дѣлители	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
будетъ $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
и $y =$	79	39	15	15	9	7	4	3	1	0

Понеже здѣсь послѣднія рѣшенія съ первыми сходны, того ради всѣхъ рѣшеній будетъ только 5.

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	15	15	9

Толѣ II.

C

836.

Подобнымъ образомъ можно также разрѣшить сіе всеобщее уравненіе: $xy + ax + by = c$, откуда выдеиъ $xy + by = c - ax$ и слѣдовательно $y = \frac{c - ax}{x + b}$, или $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$, чего ради $x + b$ должно быть дѣлителемъ даннаго числа $ab + c$; и такъ изъ каждаго дѣлителя онаго числа можно найти величину x . Положи $ab + c = fg$ такъ что $y = -a + \frac{fg}{x + b}$, и возьми $x + b = f$ или $x = f - b$, будеиъ $y = -a + g$, или $y = g - a$. По сему различнымъ образомъ число $ab + c$ въ двухъ множителяхъ изъяснивъ можно, и получится отсюда не одно но два рѣшенія, а именно: первое $x = f - b$ и $y = g - a$; а другое когда $x + b = g$ положится и найдется $x = g - b$, а $y = f - a$.

Еслили бы предложено было сіе уравненіе $xy + 2x + 3y = 42$, то было бы $a = 2$, $b = 3$ и $c = 42$, слѣдовательно $y = -2 + \frac{42}{x + 3}$; теперь число 48 различнымъ образомъ изъ двухъ множителей какъ f, g представлено быть можеиъ и всегда найдется $x = f - 3$ и $y = g - 2$, или

$x = g - 3$

$x = g - 3$, а $y = f - 2$, такіе множители суть слѣдующіе :

МНОЖИТЕЛИ	I	II	III	IV	V
	1.48	2.24	3.16	4.12	6.8
	x y	x y	x y	x y	x y
числа	-246	122	0 14	1 10	3 6
или	45 -1	21 0	13 1	9 2	5 4

837.

Еще генеральнѣе представить можно уравненіе такимъ образомъ ; $mx = ax + by + c$, гдѣ a, b, c и m данныя числа, а вмѣсто x и y требуются цѣлыя числа.

По сему ищи y , и получишься $y = \frac{ax+c}{mx-b}$; а чтобы здѣсь изъ числителя можно было исключить x , то помножь съ обѣихъ сторонъ на m , выдеишь $my = \frac{m(ax+c)}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Числитель сей дроби есть извѣстное число, коего знаменатель долженъ быть дѣлителемъ; чего ради представь числителя въ двухъ множителяхъ какъ f, g , что различнымъ образомъ

С 2

разомъ

разомъ учиниться можетъ, и смотри можно ли одного изъ нихъ сравнить съ $mx - b$, такъ чтобъ $mx - b = f$, а къ сему требуется, когда $x = \frac{f+b}{m}$, чтобъ $f + b$ могло на m раздѣлиться; чего ради здѣсь тѣ только множители изъ $mc + ab$ употребить можно, кои, когда придается къ нимъ b , могутъ на m раздѣлиться, что изъяснить примѣромъ небезулучно.

Пусть будетъ $5x = 2x + 3y + 18$, отсюда получится $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$ и $5y = \frac{10x + 90}{5x - 3} = 2 + \frac{96}{5x - 3}$; здѣсь числа 96 ти такихъ дѣлителей искашь надлежитъ, что ежели къ нимъ придадутся 3, то сумма на 5 раздѣлится: и такъ возьми всѣхъ множителей 96 ти, кои суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Откуда видно, что сѣи только числа 2, 12, 32, употребить можно.

Пусть

Пусть теперь I) $5x - 3 = 2$, будетъ $5y = 50$
слѣдов. $x = 1$, а $y = 10$.

II) $5x - 3 = 12$ — — — $5y = 10$.
— — — $x = 3$, $y = 2$.

III) $5x - 3 = 32$ — — — $5y = 5$.
— — — $x = 7$, $y = 1$.

838.

Понеже здѣсь во всеобщемъ рѣше-
нїи $my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$, то слѣдующее при-

мѣчать попребно, Ежели въ сей формулѣ
 $mc + ab$ содержащееся число имѣетъ дѣ-
лителя, коимъ находится въ форму-
лѣ $mx - b$, то частное тогда неоптѣн-
но должно имѣть сію формулу $my - a$, и
тогда число $mc + ab$ чрезъ такое произ-
веденіе $(mx - b)(my - a)$ представлено быть
можетъ. Пусть будетъ на прим. $m = 12$,
 $a = 5$, $b = 7$ и $c = 15$, то получится

$12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$, а 215 ти дѣлители суть

1, 5, 43, 215, между которыми тѣ, кои
найпи должно, содержатся въ формулѣ

$12x-7$; или когда 7 кб онымъ приладутся, тобѣ дѣлилась сумма на 12. Здѣсь 5 только сѣ дѣлаетъ, и такъ $12x-7=5$, а $12y-5=43$: изъ первой формулы будетъ $x=1$, а изъ второй y найдется въ цѣлыхъ числахъ, а именно $y=4$. Сѣ обстоятельство въ разсужденіи свойства чиселъ есть великой важности, и для того примѣнать оное весьма нужно.

839.

Разсмотримъ еще такое уравненіе: $xy+xx=2x+3y+29$; отсюда найдется $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$, или $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$;

и такъ $x-3$ долженъ быть дѣлитель числа 26, и тогда частное будетъ $y+x+1$; но дѣлители 26 сѣ суть 1, 2, 13, 26, то получаемъ мы сѣ рѣшенія:

I) $x-3=1$, или $x=4$, будетъ $y+x+1=y+5=26$, и $y=21$.

II) $x-3=2$, или $x=5$, будетъ $y+x+1=y+6=13$ и $y=7$.

III)

IIIe) $x-3=13$, или $x=16$, будетъ $y+17$
 $= 2$, и $y=-15$,

которое отрицательное знаменованіе
 оставлено, и для того послѣдняго слу-
 чая $x-3=16$ цѣпать не должно.

840.

О другихъ формулахъ сего рода,
 въ которыхъ, первой только снѣспени,
 говорить здѣсь не нужно; ибо такіе
 случаи рѣдко попадаются, да и тогда
 по показанному здѣсь правилу, рѣшены
 быть могутъ. Но когда y до второй,
 или до вышшей степени возвышено бу-
 детъ, и величину онаго по даннымъ
 правиламъ опредѣлить за благо разсуди-
 ся, то выдунъ въ такомъ случаѣ коренные
 знаки, позади коихъ вторая, или выш-
 шая степень x находится; а надлежитъ
 величину x найти такъ, чтобы извле-
 комость, или коренной знакъ уничто-
 жился.

И въ семъ то состоитъ самое ис-
 куство неопредѣленной аналитики, та-

кія не извлекаемыя формулы дѣлать извлекаемыми; что мы въ слѣдующей главѣ покажемъ.



ГЛАВА IV.

О способѣ неизвлекаемую формулу $V(a+bx+cx^2)$ дѣлать извлекаемою.

841.

Здѣсь спрашивается, какую величину вмѣсто x взять надлежитъ, чтобъ формула $a+bx+cx^2$ дѣйствительною была квадратъ, и такимъ бы образомъ можно было извѣщать ея корень въ рациональныхъ, а b и c означатъ данныя числа, и изъ свойства оныхъ особливо зависящъ опредѣленіе неизвѣстнаго числа x .

При семъ прежде примѣчать должно, что во многихъ случаяхъ рѣшенія оныхъ бывающъ не возможны. Но ежели рѣшеніе будетъ возможное, то должно по крайней мѣрѣ въ опредѣленіи буквы x ,
довольство-

довольствоваться сперва одной только рациональною величиною и не требовать, чтобъ были они еще и цѣлыя числа; что совсемъ особливаго требуетъ разысканія.

842.

Мы полагаемъ здѣсь, что формула до второй только степени возвышена; ибо высшіе степени особливаго требуютъ способу, о которомъ послѣ говорить должно.

Но если бы здѣсь и второй степени не случилось и было бы $c = 0$, то бы вопросъ никакой не имѣлъ трудности; ибо, когда сія формула дана будетъ $V(a + bx)$ и надлежитъ опредѣлять x , такъ чтобъ $a + bx$ былъ квадратъ, то должно только положить $a + bx = yy$; откуда тотчасъ выдетъ $x = \frac{yy - a}{b}$, и те-

перь вмѣсто y можно брать всѣ произвольныя числа, и изъ каждаго такое знаменованіе вмѣсто x найдетъ, что $a + bx$ будетъ квадратъ, и слѣдовательно $V(a + bx)$ рациональное число.

С 5

843.

843.

Начнемъ съ сей формулы $V(1+xx)$, гдѣ такіа знаменованія вмѣсто x найти должно, что если къ ихъ квадрату xx придастся еще 1, тобѣ сумма была паки квадратъ, что, какъ видно, въ цѣлыхъ числахъ быть не можетъ; ибо нѣтъ ни одного квадратнаго числа, которое бы было 1 цео больше предъидущаго; и такъ неопредѣленно довольствоваться должно данными числами вмѣсто x .

844.

Понеже $1+xx$ квадратное число быть должно, и мы бы захотѣли положить $1+xx=yy$, то вышло бы $xx=yy-1$, и $x=V(yy-1)$; и такъ чтобъ найти x , должно вмѣсто x такіа искать числа, чтобѣ ихъ квадраты уменьшенных 1 цео были паки квадраты, которой вопросъ столь же труденъ какъ и прежней; и слѣдовательно смѣ бы мы ничего не выиграли.

А что-

А что действительно есть такіа дроби, кои будучи вмѣсто x взяты, дѣлають $1 + xx$ квадратомъ, то изъ слѣдующихъ случаевъ видѣть можно.

I) когда $x = \frac{1}{2}$, будетъ $1 + xx = \frac{5}{4}$, слѣдовательно $V(1 + xx) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

II) равнымъ образомъ сіе учинится, когда $x = \frac{4}{3}$, гдѣ найдется $V(1 + xx) = \frac{5}{3}$.

III) попомъ ежели положится $x = \frac{3}{12}$, то получится $1 + xx = \frac{169}{144}$, изъ чего квадратной корень есть $\frac{13}{12}$.

Какимъ образомъ, должно находить болые такихъ чиселъ, о семъ надлежитъ здѣсь показать.

845.

Сіе учиниться можетъ двоякимъ образомъ; по первому способу положи $V(1 + xx) = x + p$, будетъ $1 + xx = xx + 2px + pp$, гдѣ квадратъ xx уничтожается; и слѣдовательно x безъ кореннаго знака опредѣленъ быть можетъ;
ибо

ибо въ найденномъ уравненіи вычти
сѣ обѣихъ сторонѣ x^2 , останется, $2px$
 $+ pp = 1$, откуда найдется $x = \frac{1 - pp}{2p}$,
гдѣ вмѣсто p , каждое цѣлое число и
дроби брать можно.

И такъ положивъ $p = \frac{m}{n}$ будетъ
 $x = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{2 \frac{m}{n}}$; сию дробь помноживъ вверху,
и внизу $\frac{n}{n}$ на m получится $x = \frac{nn - mm}{2mn}$

846.

По сему, чтобы $1 + x^2$ была ква-
дратъ, можно вмѣсто m и n по произ-
волѣнію брать всѣ возможные числа; и
слѣдовательно отсюда безконечное мно-
жество знаменованій вмѣсто x найдется.

Положи вообще $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, будетъ $x^2 + 1$
 $= 1 + \frac{n^2 - 2mm + m^2}{4mn}$, или $x^2 + 1$
 $= \frac{n^2 + 2mm + m^2}{4mn}$, которая дробь есть
дѣй-

дѣйствительной квадрата, и найдется
отсюда $V(1+xx) = \frac{nn+mm}{2mn}$. Изъ
сего слѣдующія малая числа вмѣсто x
изъявить можно;

если $n = 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5,$
и $m = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4,$
будетъ $x = \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{10}, \frac{15}{8}, \frac{7}{12}, \frac{19}{20}, \frac{21}{12}, \frac{8}{15}.$

847.

Отсюда слѣдуетъ вообще, что
 $1 + \frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$; помноживъ сіе
уравненіе на $(2mn)^2$, будетъ $(2mn)^2$
 $+ (nn-mm)^2 = (nn+mm)^2$; по сему имѣемъ
мы вообще два квадрата, коихъ сумма
паки квадрата. Симъ разрѣшася исперъ
сей вопросъ:

найти два квадратныя числа, коихъ
сумма пакоже квадрата?

Для $pp+qq=rr$, положи только $p=2mn$
и $q=nn-mm$, будетъ $r=nn+mm$, получимъ
 $(nn+mm)^2 = (2mn)^2 + (nn-mm)^2$, отсюда
можемъ мы также рѣшить и сей вопросъ.

Найти

Найти два квадратныя числа, коихъ бы разность была также квадратъ ?

Положимъ $pp - qq = rr$, то должно только взять $p = m + mn$, а $q = 2mn$, и будетъ $r = m - mn$, или можно также положить $p = m + mn$, а $q = mn - m$ и тогда будетъ $r = 2m$.

848.

Мы общали формулу $1 + xx$ двоякимъ образомъ здѣлать квадратомъ ; другой способъ есть слѣдующей .

Положи $V(1 + xx) = 1 + \frac{mx}{n}$, откуда получится $1 + xx = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2xx}{n^2}$, вычши съ обѣихъ сторонъ 1, останется $xx = \frac{2mx}{n} + \frac{m^2}{n^2} xx$, которое уравненіе на x раздѣлившись можетъ, и выдѣль $x = \frac{2m}{n} + \frac{m^2xx}{n^2}$, или умноживъ на m будетъ $m^2xx = 2mn + m^2xx$, откуда найдется

ся $x = \frac{2mn}{m+n}$, поставивъ сѣо величину

вмѣсто x будетъ $1 + xx = 1 + \frac{4mn}{n^2 - 2mn + m^2}$,

или $= \frac{n^2 + 2mn + m^2}{n^2 - 2mn + m^2}$, которая дробь

есть квадратъ изъ $\frac{n+m}{n-m}$; но когда

теперь получася сѣ уравненіе $1 + \frac{(2mn)^2}{(n-m)^2}$

$= \frac{(n+m)^2}{(n-m)^2}$, по слѣдствію отсюда,

какъ и прежде, $(n-m)^2 + (2mn)^2 = (n+m)^2$ два квадрата, коихъ сумма есть квадратъ.

849.

Сей случай, который мы разсматрѣли обстоятельно, дастъ намъ два способа, чинобъ всеобщую формулу $a+bx+cx^2$ здѣлать квадратомъ. Первой бывашъ въ такихъ случаяхъ, гдѣ c квадратъ, а второй гдѣ a квадратъ, которые оба случая мы здѣсь пройдемъ. I. пусть будетъ сперва c квадратное число,

или

или пусть будетъ данная формула $a + bx + ffx$, которую квадратомъ дѣлать надлежитъ. На сей концѣ положи $V(a + bx + ffx) = fx + \frac{m}{n}$, будетъ $a + bx + ffx = ffx + \frac{2fmx}{n} + \frac{mm}{nn}$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ xx уничтожается, такъ что $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, которое уравненіе помноживъ на n даемъ $na + nbx = 2mfx + mm$, откуда найдется $x = \frac{mm - na}{nb - 2mf}$.
 Сіе знаменованіе поставивъ вмѣсто x будетъ $V(a + bx + ffx) = \frac{mmf - nna}{nb - 2mf} + \frac{m}{n}$,
 или $= \frac{mnb - mmf - nna}{nb - 2mf}$.

850.

Но понеже вмѣсто x найдена дробь, то положи $x = \frac{p}{q}$ такъ чтобъ $p = mm - na$, а $q = nb - 2mf$, и формула $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffp}{qq}$ тогда будетъ квадратъ, следовательно будетъ она также квадратъ

ратъ ежели на квадратъ qq помножится; почему и сія формула $aaq - 1 - brq + ffr$ будетъ также квадратъ, ежели положится $p = mn - nta$ и $q = nt - 2mrf$, откуда бесконечное множество рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ найти можно, потому что буквы m и n по изволенію брать можно.

851.

II. Второй случай бываетъ, когда первая буква a квадратъ, и по сему пусть будетъ дана сія формула $ff + bx + cxx$, которую квадратомъ сдѣлать надлежитъ; на сей конецъ положи $\sqrt{ff + bx + cxx} = f + \frac{mx}{n}$, будетъ $ff + bx + cxx = ff + \frac{2mf x}{n} + \frac{m^2 x^2}{n^2}$, гдѣ ff уничтожится, а остальные члены на x раздѣлятся могутъ, такъ что $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{m^2 x}{nn}$ или $nnb + nncx = 2mrf + m^2 x$ или $m^2 x - m^2 x = 2mrf - nnb$, слѣдовательно $x = \frac{2mrf - nnb}{m^2 - nn}$. Поставь сію величину

• Тамъ II.

Т

амѣсто

вмѣсто x , будетъ $V(ff + bx + cxx) = f + \frac{2mf - mb}{mc - m} = \frac{mcf - mf - mb}{mc - m}$. Положи здѣсь $x = \frac{p}{q}$, то можно квадратомъ здѣлавъ слѣдующую формулу $ffqq + brq + crr$, что учинится, когда положится $p = 2mf - mb$, а $q = mc - m$.

852.

Здѣсь случай особливо достопамятенъ, когда $a = 0$, или когда формулу $bx + cxx$ квадратомъ здѣлать должно; то надлежитъ только поставить $V(bx + cxx) = \frac{mx}{n}$, будетъ $bx + cxx = \frac{mmxx}{n}$, гдѣ раздѣливъ на x и помноживъ на n , выдетъ $bmn + cmx = mnx$, слѣдовательно $x = \frac{mb}{mn - cm}$. Найми наприм. всѣ пругольные числа, которыя бы были вдругъ и квадратныя, то должно $\frac{xx + x}{2}$, и слѣдовательно $2xx + 2x$ быть квадратъ, и положивъ оной теперь $\frac{mxx}{n}$, то

21111

$$2mn + 2n = mx, \text{ и } x = \frac{2m}{m-2n}, \text{ гдѣ}$$

вмѣсто m и n всѣ возможные числа брать можно. И выходить будетъ по большей части вмѣсто x дробь; а иногда и цѣлыя числа. Такъ, когда положится $m=3$, а $n=2$, то получится $x=8$, коего треугольное число есть 36, которое также есть и квадратъ; можно также взять $m=7$ и $n=5$, будетъ $x=-50$, коего треугольное число есть 1225, которое вѣдугъ и 49ми треугольное и также квадратное.

Сіе получится также, если возмемъ $n=7$ и $m=10$; по тогда будетъ $x=49$.

Равнымъ образомъ можно положить $m=17$, а $n=12$, выйдетъ $x=288$, коего треугольное число есть $\frac{x(x+1)}{2}$,

$$= \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$$
, которое есть квадратное число, а корень онаго $= 12 \cdot 17 = 204$.

813.

Въ семъ послѣднемъ случаѣ разсмотримъ надлежитъ, чѣмъ по сему основанію формулу $bx + cxx$ здѣлать квадратомъ. Ибо оная имѣетъ множителя x ; что ведетъ насъ къ новымъ случаямъ, въ которыхъ также и формула $a + bx + cxx$ квадратомъ быть можетъ, когда ни a ни c не квадраты.

Оные случаи имѣютъ мѣсто, когда $a + bx + cxx$ на двухъ множителяхъ разрѣшится можетъ; что учинится ежели $bb - 4ac$ есть квадратъ. Для показанія сего надлежитъ примѣчать, что множители отъ корней уравненія зависятъ, чего ради положи $a + bx + cxx = 0$, будетъ $cxx = -bx - a$ и $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$,

откуда найдется $x = \frac{-b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)}$

или $x = \frac{-b + \sqrt{(bb - 4ac)}}{2c}$; по чему яв-

ствуется, что ежели $bb - 4ac$ есть квадратъ, то можно опредѣлить корень рациональной, и по сему пусть будетъ

 bb

$bb - 4ac = dd$, то выдуть корни $x = \frac{-b+d}{2c}$,

или $x = \frac{-b-d}{2c}$; и такъ двѣлители фор-

мулы $a + bx + cx^2$, будешь $x + \frac{b-d}{2c}$, и

$x + \frac{b+d}{2c}$, кои помноживъ между собою,

получишь ту же формулу раздѣленную

только на c . А именно найдется $xx + \frac{bx}{c}$

$+ \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$; но $dd = bb - 4ac$, то полу-

чится $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx$

$+ \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$: помноживъ на c выдешь cx^2

$+ bx + a$, слѣдовательно должно только

одного множителя на c помножить, то

формула наша равна будетъ сему про-

изведенію $\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c} \right)$, и ви-

дно, что сіе рѣшеніе всегда мѣсто

имѣетъ, какъ скоро $bb - 4ac$ будетъ квадратомъ.

854.

Отсюда раздѣлится третей случай, въ которомъ формулу нашу $a + bx + cx^2$ квадратомъ задѣлать можно, и которой мы къ двумъ прежнимъ присоединимъ.

III. Сей случай тогда только бываетъ, когда формулу нашу чрезъ такое произведение представишь можно, какъ $(f + gx)(b + kx)$, а дабы сіе сдѣлать квадратомъ, то положи корни $\sqrt{(f + gx)(b + kx)} = \sqrt{f + gx}$, получится $(f + gx)(b + kx) = \frac{(mn)(f + gx)^2}{nn}$, которос уравненіе раздѣливъ на $f + gx$, получишь $b + kx = \frac{mn(f + gx)}{nn}$ ш. с. $bnn + knx = fmn + gmnx$, откуда найдется $x = \frac{fmm - bnn}{knn - gmn}$.

855.

Для изъясненія сего пусть предположѣнъ будетъ сей вопросъ,

Найти

Найти числа x такъ, что ежели изъ удвоеннаго ихъ квадрата вычтешь 2, тобы остатокъ былъ квадратъ?

Понеже $2xx-2$ должно быть квадратное число, то надлежитъ здѣсь смотрѣть, чтобы сию формулу чрезъ слѣдующихъ множителей представить $2(x+1)(x-1)$. Полагая ко₁ снъ $= \frac{m(x+1)}{n}$ будешъ $2(x+1)(x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; раздѣливъ на $x+1$ и помноживъ на nn получится $2nnx-2nn = mmx+mm$, а отсюда $x = \frac{mm+2nn}{2nn-2mm}$. Возми здѣсь $m=1$ и $n=1$ будешъ $x=3$, $2xx-2=16=4^2$; положи $m=3$ и $n=2$ выдешъ; $x=-17$; но понеже здѣсь квадратъ числа x входящъ, въ разсужденіе, то все равно, будешъ ли $x=-17$, или $x=+17$: ибо изъ обоихъ получится $2xx-2=576=24^2$.

Пусть дана будетъ сія формула $b + 13x + 6x$, которую квадратомъ здѣлать надлежитъ. Здѣсь $a = 6$, $b = 13$ и $c = 6$, гдѣ слѣдовательно ни a ни c не квадраты; и такъ смотри не квадратъ ли $bb - 4ac$; но здѣсь выходитъ 25, то видно что сію формулу въ двухъ множителяхъ представить можно, кои суть $(2 + 3x)(3 + 2x)$. Пусть будетъ корень сего $\frac{m(2 + 3x)}{n}$, то $(2 + 3x)(3 + 2x)$

$$= \frac{mm(2 + 3x)^2}{nn}, \text{ отсюда } 3mn + 2mnx = 2mm$$

$$+ 3mnx, \text{ и } x = \frac{2mm - 3mn}{2nn - 3mn} = \frac{3m - 2nn}{3m - 2nn}.$$

А чтобы числитель былъ положительной, то $3mn$ должны быть больше нежели $2mm$, или $2mm$ меньше $3mn$, слѣдовательно $\frac{mm}{nn}$ меньше быть должно нежели; чтобы числитель былъ положительной; но чтобы знаменатель также былъ приточный, то $3mn$ должны быть больше нежели

нежели $2mn$ слѣдовательно $\frac{m^3}{mn}$ должно
 быть больше $\frac{2}{3}x^3$; и такъ чіюбъ вмѣсто
 x найди положительныя числа, ію вмѣ-
 сто m и n такія числа брать надлежитъ,
 чіюбъ $\frac{m^3}{mn}$ меньше было $\frac{2}{3}x^3$, а боль-
 ше $\frac{2}{3}x^3$. Положи теперь $m=6$ и $n=5$,
 будещъ $\frac{m^3}{mn} = \frac{36}{5}$ меньше $\frac{2}{3}x^3$ и очевидно
 больше $\frac{2}{3}x^3$, откуда найдемъ $x = \frac{3}{5}$.

857.

IV. Сей третій случай введешъ насъ
 къ четвертому, которой тогда мѣсто
 имѣетъ, когда формулу $a+bx+cx^2$ мо-
 жно раздробить на двѣ части такъ, что
 первая будетъ квадратъ, а другая на два
 множителя разрѣшится, такъ чію вмѣсто
 первой выдетъ такая формула $pp+qr$,
 гдѣ буквы p , q и r такую формулу
 $f+gx$ означаютъ, и тогда надлежитъ іюль-
 ко положить $\sqrt{pp+qr} = p + \frac{mq}{n}$, получимъ:

Т 5

ся

ся $pr + qr = pr + \frac{2prq}{n} + \frac{mq^2}{n}$, гдѣ pr уничтожится, а остальные члены на q дѣлящаяся, такъ что $r = \frac{2pr}{n} + \frac{mq}{n}$, или $nir = 2mip + mng$, откуда легко найдется x ; и сей по еснѣ четвертой случай, въ которомъ формулу нашу квадратамъ записать можно и которой мы примѣромъ изъяснимъ намѣрены.

858.

Вопросъ. Найти такія числа x , чтобъ ихъ удвоенной квадратъ единицею былъ больше другаго квадрата, или когда изъ онаго отнимешь 1 цу, чтобъ въ остаткѣ былъ квадратъ? какъ по сѣ числомъ 5 дѣляется, коего квадратъ 25 дважды въякуй еснѣ 50: изъ него отнявъ 1 цу останется квадратъ 49.

а

По сему $2ax - 1$ должно быть квадратъ, гдѣ по нашей формулѣ $a = -1$,
 $b = 0$

$b=0$ и $c=2$; здѣсь ни c ни a не квадраты и не могутъ такъ же на два множителя разрѣшиться, потому что $bb-4ac=8$ не квадратъ: и такъ ни одинъ изъ первыхъ трехъ случаевъ мѣста не имѣютъ.

А по четвертому можно эту формулу представить такъ: $xx+xx-1=xx+(x+1)(x-1)$, откуда корень положивъ $=x+\frac{m(x+1)}{n}$ будемъ $xx+(x+1)(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ xx уни-

чтожается, а остальные члены на $x+1$ раздѣлились могутъ; и выдетъ $mxx-nx$

$=2mxx+mmx+mm$; по чему $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mn}$

и понеже въ нашей формулѣ $2xx-1$ попадаетъ пюлько квадратъ xx , то все равно, выдетъ ли x положительной или отрицательной; можно также и $-m$ поставить вмѣсто $+m$, чтобы получить

$x=\frac{mm-nn}{nn+2mn-mn}$. Возми здѣсь $m=1$ и n

$=1$, найдется $x=1$ и $2xx-1=1$; положи
сше

еще $m=1$ и $n=2$, будетъ $x=\frac{5}{2}$ и $2xx-1=\frac{1}{2}$; а когда возьмется $m=1$ и $n=-2$ выйдетъ $x=-5$, или $x=-\frac{1}{5}$, $2xx-1=49$.

859.

Вопросъ. Найти такія числа, къ удвоенному коихъ квадрату когда придастся 2 пюбъ выйдетъ квадратъ? Такое число есть 7, котораго квадратъ дважды взятой есть 98, прибавъ 2 получится квадратъ 100.

И такъ сія формула $2xx+2$ должна быть квадратъ, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=2$, слѣдовательно ни a ни c не квадратъ, также и $bb-4ac$ не квадратъ и притомъ правило имѣть здѣсь мѣста не можетъ.

А по четвертому правилу можно нашу формулу такъ представить.

Положи первую часть $=4$ будетъ вторая $2xx-2=2(x+1)(x-1)$ и по сему формула наша $4+2(x+1)(x-1)$, кося корень пусть будетъ $2+\frac{m(x+1)}{n}$; от-

куда

куда выходитъ сѣ уравненіе $4 + 2(x+1)$

$$(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{mm'(x+1)^2}{m}, \text{ гдѣ}$$

4 уничтожаются, а остальные члены на $x+1$ могутъ раздѣлиться, такъ что $2mx - 2m = 4m + mmx + m$, слѣдователь-

$$\text{но } x = \frac{4m + m + 2m}{2m - mm}. \text{ Положи } m = 1$$

и $n = 1$, будетъ $x = 7$ и $2xx + 2 = 100$;
возьми $m = 0$ и $n = 1$ выйдетъ $x = 1$ и $2xx + 2 = 4$.

860.

Часто случается, что ни первое, ни второе, ни третье правило имѣть мѣста не могутъ, а по четвертому формулы на двѣ такія части, какія пребудутся раздѣлить не можно. Такъ когдабы сѣ формула случилась $7 + 15x + 13xx$, то хотя такое раздробленіе и возможно; но не скоро оное видѣть можно. Ибо первая часть есть $(1-x)^2$, или $1 - 2x + xx$, по сему другая будетъ $6 + 17x + 12xx$, которая для того множителей имѣетъ, что $17^2 - 4.6.12 = 1$, и слѣдовательно

ваatelyно квадратъ ; два множителя изъ сего уравненія дѣйствительно суть $(2+3x)$ $(3+4x)$, такъ что сію формулу по четвертому правилу разрѣшить можно.

Но : лзя требовать , чтобъ кто сѣ раздѣленіе угадать могъ ; чего ради наобрѣны мы еще общей пути показати къ познанію , возможно ли такую формулу раздробить ; ибо бесконечно много есть такихъ, которыхъ рѣшенія совсѣмъ не возможны, какъ наприм. въ сей формулѣ $3xx + 2$, которую никогда квадратомъ здѣлать не можно. Но еслии найдется формула въ нѣкоторомъ случаѣ возможна , то легко можемъ найти всѣ ея рѣшенія ; что мы здѣсь еще изъяснимъ.

861.

Вся польза , которая въ такихъ случаяхъ быть можетъ , состоятъ въ томъ , возможно ли какой случай найти, или отгадать , въ которыхъ бы формула $a+bx+cx^2$ была квадратъ. Для того вмѣсто x ставя малыя числа по порядку,

и смотри не выйдетъ ли квадратъ. Но что бы сей трудъ облегчить , стали вмѣсто x ломаныя числа иногда полагая требуемое получается , то можно сразу поставить вмѣсто x дробь ; яко $\frac{t}{u}$, откуда раздается сія формула , $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, которая , ежели будетъ квадратъ , помножена на uu даетъ также квадратъ. И такъ нужно только пробовать не можно ли отгадать t и u въ цѣлыхъ числахъ , чтобъ сія формула $auu + bti + ctt$ была квадратъ ; исо тогда положивъ $x = \frac{t}{u}$, будетъ также сія формула $a + bx + cxx$ заподлинно квадратъ.

Но когда не смотря на весь сей трудъ , никакого случая не найдется , то вмѣемъ мы большую причину думать , что такой формулы здѣлать квадратомъ совсѣмъ не возможно , какихъ есть безконечное множество.

Когда же случай отгаданъ , въ которомъ формула будетъ кквадратомъ , то легко найти всѣ возможные случаи , въ которыхъ она равнымъ образомъ будетъ кквадратъ , и число оныхъ всегда бесконечно велико. Для показанія сего , рассмотримъ впервыхъ формулу $2+7xx$, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=7$, оное , какъ явствуетъ , будетъ кквадратъ , когда $x=1$, что ради положи $x=1+y$, будетъ $xx=1+2y+y^2$, и формула наша будетъ $9+14y+7yy$, въ которой первой членъ есть кквадратъ , и такъ по второму правилу полагая корень ея $=3+\frac{my}{n}$ получаемъ сіе уравненіе $9+14y+\frac{my}{n} = 9+\frac{6my}{n}+\frac{mmy}{nn}$, гдѣ 9 уничтожаются , а остальные члены на y могутъ раздѣлиться , и выдѣсь $14m+\frac{my}{n} = \frac{6mn}{n}+\frac{mmy}{nn}$; слѣдовательно

$y = \frac{6mn - 14n^2}{7n^2 - mn}$, и на концу $x = \frac{6mn - 7n^2 - mn}{7n^2 - mn}$.

гдѣ вмѣсто m и n всѣ произвольныя числа брать можно.

Положи теперь $m = 1$ и $n = 1$ будетъ $x = -\frac{1}{2}$, или также, замѣмъ что xx входящъ, $x = +\frac{1}{2}$, по сему будетъ $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Возьми еще $m = 3$ и $n = 1$, будетъ $x = -1$; или $x = +1$, но положивъ $m = -3$, $n = 1$, выдетъ $x = 17$, а отсюда $2 + 7xx = 2025$ квадратъ 45ми,

Пусть также будетъ $m = 8$, а $n = 3$ получится $x = -17$ какъ и прежде.

Положимъ $m = 8$, а $n = -3$ выдетъ $x = 217$, а отсюда $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

863.

Разсмотримъ еще сію формулу, $5xx + 3x + 7$, которая будетъ квадратъ, когда $x = -1$; и такъ положи $x = y - 1$, чего ради формула наша переимѣнится въ сію:

Тамъ II.

у

519

$$\begin{array}{r} 5y - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$$

5y - 7y + 9 квадратной ся корень
 положи $= 3 - \frac{ny}{n}$, будетъ $5y - 7y + 9$
 $= 9 - \frac{6ny}{n} + \frac{mny}{nn}$, откуда получимъ $5ny$
 $- 7m = -6nn + mny$ и $y = \frac{7m - 6nn}{5m - mn}$, слѣ-
 довательно $x = \frac{2m - 6mn + mnn}{5m - mn}$. Возми $m = 2$,
 $n = 1$, будетъ $x = 6$, и слѣдовательно
 $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Положивъ $m = -2$ и $n = 1$ найдется
 $x = 18$, и $5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

864.

Разсмотримъ еще формулу $7xx$
 $+ 15x + 13$ и положимъ $x = \frac{t}{u}$, такъ
 чтобъ формула $7u + 15u + 13uu$ была
 квадратъ; попробуй теперь въб-
 сшо t и u брать малая числа, какъ
 слѣдуетъ.

Если

Иногда весь трудъ бываеиъ напрасенъ, чтобъ отгадать случай, въ которомъ бы предложенная формула была квадратъ; какъ на прим. съ формулою дѣлается $3x^2 + 2$ или когда вмѣсто x возьмется $\frac{t}{u}$; то съ ссю $3t^2 + 2u^2$, которая, какъ и бы вмѣсто t и u числа взяты ни были, никогда квадратомъ не будетъ. Такихъ формулъ, коихъ ни коимъ образомъ квадратомъ дѣлать не лзя, есть безконечное множество, и для того спомниъ труда дать нѣкоторые признаки, по которымъ бы сию въ нихъ невозможность познать можно было, дабы сей трудъ, чрезъ отгадываніе находить такіе случаи, въ которыхъ квадратъ выходилъ, не былъ тщетенъ, къ чему слѣдующая глава служиши.

ГЛАВА V

О случаяхъ, въ которыхъ формула $a + bx + cxx$ никогда квадратомъ быть не можетъ,

866.

Когда общая наша формула состоитъ изъ трехъ членовъ, то надлежитъ примѣчанъ, что оную всегда въ другую переменную можно, въ которой средняго члена недоставитъ. Ся дѣлается положивъ $x = \frac{y-b}{2c}$; по чему формула наша получаетъ сей видъ $a + \frac{by}{2c} - \frac{bb}{4c} + \frac{yy - 2by + bb}{4c}$, или $\frac{4ac - bb + yy}{4c}$; изъ по-
 неже сія формула должна быть квадратъ, то положивъ его $= \frac{zz}{4}$ будетъ $4ac - bb + yy = czz + bb - 4ac$. И такъ ежели наша формула должна быть квадратъ, то будетъ также и $czz + bb - 4ac$ квадратъ и обрат-

У 3

но;

но ; следовательно когда вмѣсто $bb-4ac$ напишемъ z , то все дѣло въ томъ состоитъ , узнать можеть ли такая формула быть квадратъ или нѣтъ ; а поскольку сія формула состоитъ только изъ двухъ членовъ , то безспорно легче разсуждать о ея возможности или невозможности , что по свойству обоихъ чиселъ c и z учинишься можешь.

867.

Когда $t=0$, то явствуетъ , что формула czx , тогда только будетъ квадратъ , когда число c квадратъ , ибо одинъ квадратъ раздѣленный на другой , въ частномъ дають квадратъ : такъ czx не можеть быть квадратъ , ежели $\frac{czx}{zx}$, т. е. c не квадратъ ; следовательно когда c не квадратъ , то формула czx ни коимъ образомъ квадратъ быть не можетъ . Но ежели c само по себѣ есть квадратное число , то и czx будетъ также квадратъ , какія бы числа вмѣсто z взяты ни были.

868.

868.

А что бы можно было рассуждать и о другихъ случаяхъ, то надлежитъ намъ въ помощь взять то, что прежде говорено было, о разныхъ родахъ чиселъ, въ сужденіи каждаго дѣлителя.

Такъ въ сужденіи дѣлителя 3 числа бывають прозякаго рода: первой содержишь тѣ числа, кои на 3 дѣлятся на цѣло и въ формулѣ $3n$ представляются.

До втораго рода надлежитъ тѣ, кои раздѣленные на 3, дають въ остатокъ 1 и въ формулѣ $3n+1$ содержатся.

Третій родъ заключаетъ въ себѣ числа, кои раздѣленные на 3, дають остатокъ 2 и содержатся въ формулѣ $3n+2$.

Ежели всѣ числа въ одной изъ сихъ трехъ формулъ содержатся, то рассмотримъ теперь ихъ квадраты.

Когда число содержится въ формулѣ $3n$, то будеть его квадратъ $9n^2$, кото-

У 4

рокъ

рой не только на 3, но и на 9 дѣлился.

Буде же число во второй формулѣ $3n+1$ содержится, то квадратъ его есть $9n^2+6n+1$, которой раздѣленъ будучи на 3 даетъ въ частномъ $3n+2n$, а въ остаткѣ 1, слѣдовательно до втораго рода надлежитъ.

Ежели же наконецъ содержится число въ формулѣ $3n+2$, то квадратъ его есть $9n^2+12n+4$, которой раздѣливъ на 3 выдеиъ $3n+4n+1$, а остатокъ 1, и слѣдовательно надлежитъ также до втораго рода $3n+1$. Откуда видно, что всѣ квадратныя числа въ рассужденіи дѣлителей $3x$, суть только двоякаго рода; ибо они, или на 3 могутъ раздѣлиться на цѣло, и тогда неотмѣнно раздѣлятся также и на 9, или ежели на 3 раздѣлиться не могутъ, то остатокъ бываетъ всегда 1, а 2 никогда; слѣдовательно ни одно число содержащееся въ формулѣ $3n+2$ квадратъ быть не можетъ.

869.

Изъ сего можемъ мы легко показывать, что формула $3xx+2$ никогда квадратомъ не будетъ, хотя бы вмѣсто x цѣлое, или ломаное число взято было; ибо когда x цѣлое число и формула $3xx+2$ на 3 раздѣлится, то останется 2, слѣдовательно сѣя формула квадратъ быть не можетъ; но ежели x дробь, то положи сѣю $=\frac{f}{u}$, о которой дроби можемъ мы принять, что она въ самой уже меньшей видѣ приведена, и слѣдовательно $\frac{f}{u}$ никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 не имѣетъ.

Ежели бы $\frac{3ff}{uu}+2$ было квадратное число, то помноживъ на uu , т. е. $3ff+2uu$ надлежало бы быть квадрату; но сему равнымъ образомъ спастись не лзя: ибо число u , или можетъ на 3 раздѣлиться, или нѣтъ; ежели можетъ, то не раздѣ-

у s

лился

лителѣ g , по тому что иначе бы g и n общаго дѣлителя имѣли.

И такъ положивъ $n = 3f$ формула наша будетъ $3tt + 18ff$, которая раздѣленная на 3 дастъ $tt + 6ff$, которая паки на 3 раздѣлиться не можетъ, какъ для квадрата требуется; ибо хотя $6ff$ и могутъ раздѣлиться, но tt , раздѣленное на 3 дастъ въ остаткѣ 1.

Но когда n на 3 раздѣлиться не можетъ, то смотри, что будетъ въ остаткѣ. Понеже первой членъ на 3 можетъ раздѣлиться, то все дѣло состоитъ только въ остаткѣ втораго члена; но теперь nn раздѣленное на 3, дастъ въ остаткѣ 1, или оно есть число сего рода $3n + 1$, по чему $2nn$ будетъ число сего рода $6n + 2$, и слѣдовательно раздѣленное на 3, дастъ остаткѣ 2; чего ради формула наша $3tt + 2nn$ раздѣленная на 3, дастъ въ остаткѣ 2, и заподлинно квадрата быть не можетъ.

870.

Такимъ же образомъ можно доказывать, что и сія формула $3n+5m$, никогда квадратомъ не будетъ, да и ни одна изъ сихъ $3n+8m$, или $3n+11m$, или $3n+14m$ и проч., гдѣ числа 5, 8, 11, 14 и проч. раздѣленные на 3, даюшъ въ остаткѣ 2, ибо если бы n на 3 могло раздѣлиться; то 1 не можетъ. Положи $n=3t$, то бы формула раздѣлилась на 3, а на 9 нѣтъ. Если же n на 3 не дѣлимо, и слѣдовательно m есть число сего рода $3n+1$, то хотя бы первой членъ $3n$ на 3 и раздѣлился, но другой $5m$ сей формулы $15n+5$, или $8m$ изъ сей $24n+8$, или $11m$ изъ $33n+11$ и проч. раздѣливъ на 3 получился въ остаткѣ 2, и слѣдовательно квадратъ быть не можетъ.

871.

Сіе самое бываетъ съ общєю формулою $3n+(3n+2)m$, которая никогда квадратъ не будетъ, да и тогда также, когда вмѣсто n положатся отрицательныя

316 О НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ

ныя числа, такъ когда $n = -1$, то не возможно чѣтобъ сія формула $3n - 1$ была квадратомъ. Ибо ежели n на 3 дѣлился, то дѣло уже извѣстно, а когда бы n на 3 не дѣлилось, то было бы n число сего рода $3n + 1$ а формула наша $3n - 1$, которую раздѣливъ на 3, получился въ остаткѣ -1 , къ которой ежели приложится 3, выдѣлится $+2$. Положи вообще $n = +m$, будетъ наша формула $3m - (3m - 2)im$, которая никогда квадратъ быть не можетъ.

872.

Къ сему привело насъ разсужденіе дѣлителя 3 хъ, рассмотримъ теперь дѣлителя 4; ибо тогда всѣ числа содержатся въ сихъ формулахъ,

I $4n$; II $4n + 1$; III $4n + 2$; IV $4n + 3$.

Чиселъ перваго роду квадратъ есть $16n^2$ и можетъ на 16 раздѣлиться, когда же число втораго рода $4n + 1$, то квадратъ его $16n^2 + 8n + 1$, которой раздѣливъ на 8, даетъ остатокъ 1 и надлежитъ

до формулы $8n + 1$; а ежели будетъ число
третьяго роду $4n + 2$, то квадратъ
оного $16n + 16n + 4$, которой раздѣливъ
на 16 получится въ остаткѣ 4; и слѣ-
довательно въ формулѣ $16n + 4$ содер-
жится; буде же наконецъ число четвер-
таго роду $4n + 3$, то квадратъ его $16n + 24n + 9$,
которой раздѣливъ на 8, въ
остаткѣ будетъ 1.

873.

Изъ сего научаемся мы слѣдую-
щему: въпервыхъ, что всѣ четныя ква-
дратныя числа въ формулѣ нашей $16n$,
или въ сей $16n + 4$ содержатся; слѣдо-
вательно всѣ остальные четныя форму-
лы, т. е. $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$,
 $16n + 10$, $16n + 12$, $16n + 14$, никогда
квадратами бытъ не могутъ.

Потомъ изъ нечетныхъ квадратовъ
усматриваемъ мы, что всѣ они въ фор-
мулѣ $8n + 1$ содержатся, или раздѣливъ
на 8 даюиъ въ остаткѣ 1, по сему
всѣ прочія нечетныя числа, которыя
въ

въ одной изъ сихъ формулъ $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ содержится квадратами быть не могутъ,

874

По сему основанію можемъ мы пакъ показать, что формула $3i+2m$ квадратами не будетъ; ибо или оба числа суть нечетныя или одно четное а другое нечетное, потому что оба вдругъ четныя быть не могутъ, въ противномъ случаѣ 2 былъ бы ихъ общей дѣлитель; ежели оба нечетныя и слѣдовательно какъ i такъ, и m содержатся въ формулѣ $8n+1$, то первой членъ $3i$ раздѣливъ на 8 далъ бы въ остаткѣ 3, а второй членъ 2, оба вмѣстѣ 5, и слѣдовательно не квадратъ. Но ежели бы i было четное число, а m нечетное, то первой бы членъ $3i$ раздѣлился на 4, а другой $2m$ раздѣленной на 4 въ остаткѣ далъ бы 2, оба вмѣстѣ 2, и слѣдовательно не квадратъ. Если бы наконецъ m было четное, а именно $=2s$, а i нечетъ слѣдовательно

ii

$tt = 8n + 1$, то наша формула была бы $24n + 3 + 8ss$, которую раздѣливъ на 8, получится въ остаткѣ 3; и такъ квадратовъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ сіе доказательство можно употребить и въ сей формулѣ $3tt + (8n + 2)uu$, также и въ сей $(8m + 3)tt + 2uu$, да и въ сей такожде $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, гдѣ вмѣсто m и n всѣ цѣлыя числа какъ положицельныя такъ и отрицательныя брать можно.

875.

Такимъ же образомъ приступимъ мы далѣе къ дѣлителю 5, въ рассужденіи котораго всѣ числа содержатся въ одной изъ сихъ формулъ:

I) $5n$; II) $5n + 1$; III) $5n + 2$; IV) $5n + 3$; V) $5n + 4$.

Еслили число будетъ перваго роду, то его квадратъ есть $25n$, который не только на 5, но и на 25 раздѣлился можетъ.

Будеже число будетъ втораго роду, то квадратъ его $25n + 10n + 1$, который

рой раздѣливъ на 5, останется 1; и слѣдовательно въ формулѣ $5n+1$ содержится. Если же число шретьяго рода, то квадратъ онаго есть $25m+20n+4$, которой раздѣливъ на 5 дастъ въ остаткѣ 4.

Когда же число четвертаго рода, то квадратъ его есть $25m+30n+9$, которой раздѣливъ на 5 останется 4.

А еслии наконецъ будетъ число пятаго рода, то квадратъ онаго $25m+40n+16$, которой раздѣливъ на 5 дастъ остатокъ 1. И такъ ежели квадратное число на 5 раздѣлиться не можетъ, то остатокъ бываетъ всегда или 1, или 4, а никогда 2 или 3; по чему въ сей формулѣ $5n+2$ и $5n+3$ квадратъ содержаться не можетъ.

876

По сему основанію можемъ мы также доказать, что ни формула $5n+2m$, ниже сія $5n+3m$ квадратами не будутъ, ибо и на 5 или дѣлимо или нѣтъ: въ первомъ

первомъ случаѣ сія формулы могли бы раздѣляться на 5, а ни 2ζ нѣтъ. слѣдовательно квадратами быть не могутъ; но если бы и на 5 не дѣлились, то $и$ равно или $\zeta n + 1$, или $\zeta n + 4$; въ первомъ случаѣ будешь формула $\zeta n + 1\zeta n + 2$, которую раздѣливъ на 5 останется 2, а другая будешь $\zeta n + 1\zeta n + 3$ которую когда раздѣливъ на 5, въ остаткѣ будешь 3, и слѣдовательно квадратами быть не могутъ. Но если $и = \zeta n + 3$, то первая формула выдетъ $5\zeta n + 10\zeta n + 8$, которая когда раздѣлится на 5, въ остаткѣ будешь 3, а другая $\zeta n + 1\zeta n + 12$, которую раздѣливъ на 5 останется 2; слѣдовательно и въ семъ случаѣ также квадратами быть не могутъ.

Отсюда такожде явствуетъ, что ни сія формула $5\zeta n + (\zeta n + 2)и$, ни же сія $\zeta n + (\zeta n + 3)и$ квадратами не будутъ: ибо такіе же выдутъ остатки какъ и прежде; да можно также и въ первомъ членѣ поставить ζn , гдѣ только n на 5 не дѣлится.

Томъ II.

Ф

877.

Всѣ четные квадраты въ формулѣ $4n$, а всѣ нечетные въ формулѣ $4n+1$ содержатся, и понеже ни $4n+1-2$, ни $4n+3$ квадрата быть не могутъ, по слѣдуетъ отсюда, что общая формула $(4m+3)ii + (4n+3)iii$ никогда квадрата не будетъ; ибо если бы i было четное число, то бы ii раздѣлилось на 4, а другой бы членъ раздѣленной на 4 оставилъ 3. Но когда оба числа i и n не четные, то вышли бы остатки изъ ii и iii 1, слѣдовательно изъ цѣлой формулы осталось бы 2; но понеже нѣтъ ни одного числа, которое раздѣленное на 4 оставляло бы 2, было бы квадратное. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ m , такъ и n , можно взять отрицательные и о такомъ же; по чему ни формула $3ii + 3iii$, ни $3ii - iii$ квадратомъ быть не можетъ.

Когда мы изъ теперешнихъ дѣлителей нашли, что нѣкоторые роды чиселъ,

селъ , никогда квадратами быть не могутъ по сѣ самое имѣетъ также мѣсто и при всѣхъ другихъ дѣлителяхъ , а именно что есть нѣкоторые роды чиселъ , коихъ квадраты не возможны.

Пусть будетъ дѣлитель 7 , то всѣ числа въ слѣдующихъ 7 ми родахъ заключающіяся , которыхъ мы рассмотримъ также и квадраты.

роды чиселъ , ихъ квадраты надлежитъ до рода

I.	$7n$	$49n$	$7n$
II.	$7n+1$	$49n+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49n+28n+4$	$7n+4$
VI.	$7n+3$	$49n+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49n+56n+16$	$7n+2$
IV.	$7n+5$	$49n+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49n+84n+36$	$7n+4$

Понеже квадраты , которые на 7 не дѣляясь , содержатся въ одномъ изъ сихъ трехъ родовъ ; $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, то другіе 3 рода изъ свойства квадратовъ совсѣмъ исключаются , кои суть $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$. Причина сему
Ф 2
видна ,

видна, потому что всегда два рода чиселъ найтись можно, коихъ квадраты надлежатъ до одного рода.

879.

Для уразумѣнія сего надлежитъ примѣчать, что послѣдней родъ $7n+6$ можетъ изъясниться также чрезъ $7n-1$, равнымъ образомъ формула $7n+5$, съ $7n-2$ одинаковы; также же $7n+4$ по же, что и $7n-3$: но извѣстно что квадраты сихъ двухъ родовъ чиселъ $7n+1$ и $7n-1$ раздѣленные на 7, даютъ остатокъ одинакъ, а именно 1цу; подобнымъ образомъ также квадраты сихъ двухъ родовъ $7n+2$ и $7n-2$ одинаковы.

880.

И такъ вообще, какого бы свойства дѣлитель ни былъ, котораго означимъ мы буквою d , то произшедшаго отсюда разныхъ родовъ числа, суть слѣдующія :

dn $dn+1$, $dn+2$, $dn+3$ и проч. $dn-1$, $dn-2$, $dn-3$ и проч.

гдѣ квадраты изъ $dn+1$ и изъ $dn-1$ съ общесъ имѣютъ, что раздѣленные на d даютъ остатокъ 1, и следовательно оба надлежатъ до одного рода $dn+1$. равнымъ образомъ то же бываетъ съ обоими родами $dn+2$ и $dn-2$, коихъ квадраты надлежатъ до рода $dn+4$.

И по сему вообще то же дѣлается съ двумя родами $dn+a$ и $dn-a$, коихъ квадраты раздѣленные на d даютъ одинакой остатокъ, а именно aa , или такой же остатокъ, какъ когда aa раздѣлено на d .

§§1.

Симъ образомъ получился бесконечное множество такихъ формулъ, какъ $att+bun$, кои никогда квадратами не будутъ; такъ изъ дѣлителя 7ми, легко познается, что ни одна изъ сихъ фор-

Ф 3

мулъ

муль $7it + 3ии$; $7it + 5ии$ и $7it + 6ии$, никогда квадратоу быть не можетъ; потому что и раздѣленное на 7, даетъ въ остатокъ или 1, или 2, или 4. Потомъ изъ первой формулы остается или 3, или 6, или 5; а изъ второй или 5, или 3, или 6; изъ третьей или 6, или 5, или 3 чему ни при какомъ квадрату спастись не лзя. Если теперь такія формулы случатся, то тщетной будетъ трудъ попасть на такой случай, гдѣ бы могъ быть ни квадрату, и для того сіе разсужденіе естъ великой важности.

Но ежели предложенная формула не такого свойства будетъ, и можно отгадать нѣкоторой случай, въ которомъ здѣлается она квадрату, то показано уже въ прежней главѣ, какимъ образомъ отсюда безконечное множество другихъ случаевъ находить должно.

Предложенная формула была собственно $axx + 1$, и понеже вмѣсто x находились обыкновенно дроби, для того клали мы $x = \frac{z}{d}$, такъ что сію формулу

аи

$att + bin$ квадратомъ здѣлать должно было.

Безконечное также множество бываетъ случаевъ гдѣ x и въ самыхъ цѣлыхъ числахъ изъясненъ быть можетъ; а какимъ образомъ оные случаи находить, слѣдующая глава покажетъ.



ГЛАВА VI.

О случаяхъ, въ которыхъ формула $axx + b$ будетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

882.

Видѣли уже мы, какимъ образомъ формулу $a + bx + cx$ переменять должно, чтобъ средней членъ уничтожился; и по сему довольно будетъ съ насъ, когда мы настоящее разсужденіе къ сей только формулѣ $axx + b$ присвоимъ; при чемъ примѣчать надлежитъ, что имѣемо x одна цѣлая числа, изъ коихъ

Ф 4

фор-

формула квадратовъ будетъ, находить должно.

Прежде всего потребно здѣсь, чтобъ такая формула сама по себѣ была возможна; ежели же она не возможна, то и положенныя вмѣсто x дроби, не упоминая о цѣлыхъ числахъ имѣть мѣста не могутъ.

§83.

И такъ положи сию формулу $ax + b = y$, гдѣ буквы x и y цѣлыя числа быть должны, потому что a и b суть такія же.

На сей конецъ необходимо нужно знать или угадать одинъ случай въ цѣлыхъ числахъ, ибо иначе весь бы трудъ былъ тщетной, искать больше такихъ случаевъ, ежели бы случилось, что сама формула не возможна.

Положимъ что сія формула квадратомъ быть можетъ, ежели положимся $x = f$, и пусть ся квадратъ будетъ $= gg$ такъ что $aff + b = gg$, гдѣ f и g извѣстныя числа, и слѣдовательно осталось переперъ

перъ только, какимъ образомъ изъ сего случая другіе вывести можно сіе разысканіе шѣмъ важнѣе, чѣмъ больше оно трудностямъ подвержено, но кои мы преодолѣмъ слѣдующими пріемами.

884.

Найдено уже, что $aff + b = gg$ и сверхъ сего должно быть $ax + b = yu$, вычти прежнес уравненіе изъ сего послѣдняго, то получится $ax - aff = yu - gg$, что въ множителяхъ представивъ можно такъ:

$a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$; помножь съ обѣихъ сторонъ на pq выдѣль $apq(x + f)(x - f) = pqy + g(y - g)$: но чтобы вывести отсюда равенство, то здѣлай сіе раздѣленіе $ap(x + f) = q(y + g)$ $q(x - f) = p(y - g)$, и изъ сихъ обоихъ уравненій ищи обѣ буквы x и y ; первое раздѣливъ на q дастъ $y + g = \frac{apx + apf}{q}$, а второе раздѣ-

ливъ на p дастъ $y - g = \frac{qx - qf}{p}$ сіе зычти изъ прежняго, останется $2g = \frac{f(qq + pfa) + (apf - qp)}{qp}$ помноживъ на pq выдѣль $2pqg = (apf - qp)$
Ф 5 x

$x + (arp + qq)f$ отсюда $x = \frac{2grq}{arp - qq} - \frac{(arp + qq)f}{arp - qq}$

а изъ сего потомъ найдется $y = g + \frac{2gqq}{arp - qq}$

$-\frac{(arp + qq)fq}{(arp + qq)r} - \frac{qf}{r}$, гдѣ первые два члена

содержать букву g , кои соединивъ вмѣстѣ дають $\frac{g(arp + qq)}{arp - qq}$, а другіе два чле-

на имѣющіе букву f , и подъ однимъ знаменателемъ дають $-\frac{2afpq}{arp - qq}$, слѣдова-

тельно y получится $= \frac{g(arp + qq) - 2afpq}{arp - qq}$.

885.

Сей трудъ кажется, что съ нашимъ намѣреніемъ не сходствуетъ; ибо здѣсь пришли мы къ ломаннымъ числамъ, когда намъ вмѣсто x и y цѣлыя числа искать должно; чего ради получили бы мы другой новый вопросъ, какія числа вмѣсто r и q взять надлежитъ, чтобы избѣжать дробя, которой вопросъ еще труднѣе кажет-

кажется нежели нашъ главной. Но можно здѣсь употребить другое искусство, коимъ мы легко наше намѣреніе достигнемъ ; ибо когда здѣсь все въ кубныхъ числахъ изъяснить должно , то положи

$$\frac{ap^3 + qq}{ap - qq} = m \text{ и } \frac{2pq}{ap - qq} = n \text{ дабы имѣть } x = mg - pf, \text{ и } y = mg - n f. \text{ Здѣсь не можемъ}$$

мы взять m и n по изволенью ; но они такъ должны быть опредѣлены , чтобы съ прежними опредѣленіями сходствовали.

На сей конецъ рассмотримъ мы ихъ квадраты, и будетъ $mm = \frac{ap^6 + 2ap^4qq + q^4}{ap^6 - 2ap^4qq + q^4}$

$$\text{а } mn = \frac{4p^2qq}{ap^6 - 2ap^4qq + q^4} ; \text{ откуда найдется}$$

$$mm - ann = \frac{ap^6 + 2ap^4qq + q^4 - 4ap^2qq}{ap^6 - 2ap^4qq + q^4}$$

$$= \frac{ap^6 - 2ap^4qq + q^4}{ap^6 - 2ap^4qq + q^4} = 1.$$

886.

Изъ сего явствуемъ , что числа m и n такого свойства быть должны , чтобы $mm - ann = 1$; но понеже a есть изъ-

извѣстное число, то прежде всего надлежитъ найти вмѣсто n такое цѣлое число, чтобъ $am + 1$ было квадратъ, котораго корень есть m , а какъ скоро оное найдется и сверхъ того еще число f , чтобъ $aff + b$ было квадратъ т. е. gg , то получатся вмѣсто x и y слѣдующія величины въ цѣлыхъ числахъ; $x = mg - mf$, $y = mg - af$, откуда $axx + b = yy$.

897.

Само собою явствуетъ, что когда однажды n найдено, то можно вмѣсто его поставить $-n$, потому что квадратъ онаго n^2 есть одинаковъ.

Для нахождения x и y въ цѣлыхъ числахъ, чтобъ $axx + b = yy$ было, надлежитъ прежде всего знать какой случай, чтобъ $aff + b = gg$ и какъ скоро сей случай извѣстенъ будетъ, то должно еще къ числу a найти такія числа m и n , чтобъ $am + 1 = mm$ было; о чемъ въ слѣдующемъ показано будетъ. Когда же сіе задѣлано будетъ, то получится заразъ новой
слу-

случай , а именно $x = ng + mf$ и $y = mg + nf$, и будетъ $axx + b = y$.

Поставь сей новой случай на мѣстѣ прежняго, которой былъ взятъ за извѣстной, и напиши $ng + mf$ вмѣсто f , а $mg + nf$ вмѣсто g , то получится вмѣсто x и y новыя пакы знаменованія, изъ которыхъ еще, когда они вмѣсто f и g поставятся, другія новыя выдутъ и такъ далѣе: такъ что если съ начала одинъ только такой случай былъ извѣстенъ, то изъ онаго бесконечно много другихъ найши можно.

888.

Способъ доходить до сего рѣшенія нарочито труденъ, и казался съ начала не соотвѣтствовать нашему намѣренію, ибо мы нашли нарочито дѣшныя дробы кои особливѣе щастіемъ уничтожить удалось, и пакъ не худо, ежели мы еще другой путь покажемъ, который веденъ насъ къ слѣдующему рѣшенію.

889.

Когда должно быть $axx + b = yy$, и найдено уже $aff + b = gg$, то изъ онаго уравненія будетъ $b = yy - axx$; а изъ сего $b = gg - aff$.

Слѣдовательно $yy - axx = gg - aff$, и теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтооъ изъ извѣстныхъ чиселъ f и g найдемъ независимыя x и y , и тогда сразу видно, что сіе уравненіе получившя, когда положишь $x = f$ и $y = g$, но отсюда ни одного новаго случая не получишь кромѣ того, которой взявъ за извѣстной.

Для того положимъ, что вмѣсто g такое число найдено, что $am + 1$ снѣ квадратъ, или что $am + 1 = mm$, откуда будетъ $mm - am = 1$. Симвъ умножь прежняго уравненія часть $gg - aff$ будетъ $yy - axx = (gg - aff)(mm - am) = ggmm - affmm - aggm + aaffm$. На сей конецъ полагая $y = gm + afn$ получишь $ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx - ggmm - affmm - aggm + aaffm$, гдѣ члены $ggmm$ и $aaffm$ уничтожаются, и слѣдовательно выдѣлится axx

$axx = affmt + aggt + 2afgt$, которое уравненіе раздѣливъ на a получится $xx = ffmt + ggt + 2fgt$, которая формула, какъ видно, есть квадратъ и найдется $x = ft + gn$, что съ прѣжде найденною формулою согласуетъ.

890.

Сіе рѣшеніе потребно изъяснить, нѣкоторыми примѣрами.

Вопросъ. Найми всѣ цѣлыя числа вмѣсто x , такъ чтобъ $2xx - 1$ было квадратъ, или чтобъ $2xx - 1 = yy$. Здѣсь $a = 2$ и $b = -1$; первый случай поспѣшенъ, ежели возьмется $x = 1$ и $y = 1$, изъ сего извѣстнаго случая вмѣемъ мы $f = 1$ и $g = 1$; но пребудетъ еще найми такое число вмѣсто n , чтобъ $2nn + 1$ было квадратъ, а именно mt . Сіе учинится, когда $n = 2$ и $t = 3$. По сему изъ каждаго извѣстнаго случая f и g сей новой находимъ: $x = 3f + 2g$ и $y = 3g + 4f$; но извѣстной случай есть $f = 1$ и $g = 1$, для шого слѣдующіе новыя случаи найдутся.

 $x = f$

$$\begin{array}{l} x = f = 1 \mid 5 \mid 29 \mid 169 \\ y = g = 1 \mid 7 \mid 41 \mid 239 \text{ и проч.} \end{array}$$

891.

Вопросъ. Найти всѣ треугольныя числа, которыя бы были вдругъ и квадратыя?

Пусть будетъ x корень треугольнаго числа, по самой треугольницѣ $\frac{x^2 + x}{2}$, которой квадратъ быть долженъ, и когда корень онаго будетъ x , по $\frac{x^2 + x}{2} = xx$, помножь на 8 выдѣль $4xx + 4x = 8xx$; придай съ обѣихъ сторонъ 1, получится $4xx + 4x + 1 = (2x + 1)^2 = 8xx + 1$. Дѣло состояишь теперь въ томъ, чтобъ $8xx + 1$ было квадратъ и положишь $8xx + 1 = yy$ будетъ $y = 2x + 1$; слѣдовательно искомой треугольника корень $x = \frac{y^2 - 1}{2}$; здѣсь $a = 8$ и $b = 1$ и извѣстной случай виденъ: а именно $f = 0$ и $g = 1$; а что бы еще было $8m + 1 = m^2$, то $n = 1$ и $m = 3$, откуда получится $x = 3f + g$ и $y = 3g + 8f$, а $z = \frac{y^2 - 1}{2}$. Отсюда получаемъ мы слѣдующія рѣшенія:

$$x = f$$

$$\begin{array}{l} x = f = 0 \left| \begin{array}{c|cc|c|c} 1 & 6 & 35 & 204 & 1189 \\ 3 & 17 & 99 & 577 & 3363 \\ 1 & 8 & 49 & 288 & 1681 \end{array} \right| \text{ и проч.} \\ y = g = 1 \\ z = \dots = 0 \end{array}$$

892.

Вопросъ Найти всѣ пятиугольныя числа, которые бы были также и квадратыя?

Пусть будетъ корень пятиугольныхъ $= z$, то пятиугольникъ самъ $= \frac{5z^2 - 3z}{2}$, которой пусть будетъ равенъ квадрату xx ; чего ради $3zx - z = 2xx$, помножь на 12 и придай 1, выдеишь $36zx - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z - 1)^2$, положи теперь $24xx + 1 = yu$. будетъ $y = 6z - 1$ и $z = \frac{y+1}{6}$; но понеже здѣсь $a = 24$, $b = 1$, то извѣстной случай $f = 0$ и $g = 1$. Покомъ должно быть $24m + 1 = m^2$, то возми $n = 1$, будетъ $m = 5$; и такъ получаси мы $x = 5f + g$, $y = 5g + 24f$ и $z = \frac{y+1}{6}$, или тогда $y = 1 - 6z$, то будетъ также $z = \frac{1-y}{6}$; откуда найдутся слѣдующія рѣшенія.

Табл II.

X

 $x = f$

$$\begin{array}{l}
 x = f = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 10 \end{array} \right| \begin{array}{c} 99 \\ 980 \end{array} \\
 y = g = 1 \quad \left| \begin{array}{cc} 5 & 49 \end{array} \right| \begin{array}{c} 485 \\ 4801 \end{array} \\
 z = \frac{y+1}{4} = \frac{1}{4} \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{25}{4} \end{array} \right| \begin{array}{c} 81 \\ \frac{2401}{4} \end{array} \\
 \text{или } z = \frac{1-7}{4} = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{4} & -8 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{207}{4} \\ -800 \end{array}
 \end{array}$$

893.

Вопросъ. Найми всѣ квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои когда помножатся на 7, и къ произведенію придастся 2, чтобъ вышли паки квадраты?

Здѣсь требуется, чтобъ $7xx + 2 = y^2$, гдѣ $a = 7$, $b = 2$, известной случай попадется, когда $x = 1$, будсть $x = f = 1$ и $y = g = 3$, рассмотримъ уравненіе $7m^2 + 1 = n^2$ легко найдется, что $n = 3$ и $m = 1$, слѣдовательно $x = 8f + 3g$ и $y = 8g + 21f$, откуда выдутъ вмѣсто x и y слѣдующія знаменованія:

$$\begin{array}{l}
 x = f = 1 \quad \left| \begin{array}{cc} 17 & 271 \end{array} \right| \\
 y = g = 3 \quad \left| \begin{array}{cc} 45 & 717 \end{array} \right|
 \end{array}$$

894.

Вопросъ. Найми всѣ треугольныя числа, кои бы были вдругъ и пяшугольныя?

Пусть

Пусть корень треугольных $= p$, а
 пятиугольных $= q$, то должно быть
 $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, или $3qq-q=pp+p$; от-

сюда ища q : понеже $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$,

то $q = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{pp+p}{9}\right)}$ т. е. $q = \frac{1+\sqrt{1+3pp+3p}}{6}$
 и дѣло состоятъ въ томъ, чѣмъ $12pp$
 $+ 12p + 1$ было квадратъ, и притомъ въ
 цѣлыхъ числахъ; понеже адѣсь средней
 членъ $12p$ попадаетъ, то положи $p = \frac{x-1}{2}$,
 чрезъ что получимъ мы $12pp = 3xx - 6x$
 $+ 3$ и $12p = 6x - 6$, слѣдовательно $12pp$
 $+ 12p + 1 = 3xx - 2$, что должно быть
 квадратъ. Положимъ еще $3xx - 2 = yy$,
 выдемъ $p = \frac{x-1}{2}$ и $q = \frac{1+y}{6}$ и все дѣло со-
 состоятъ въ формулѣ $3xx - 2 = yy$, гдѣ $a=3$,
 $b=-2$ и извѣстной случай $x=f=1$,
 $y=g=1$. Потомъ для уравненія mn
 $= 3mn + 1$ имѣемъ мы $n=1$ и $m=2$;
 откуда слѣдующія величины, вмѣсто x и
 y , а потомъ вмѣсто p и q получатся.

И такъ когда $x=2f+g$ и $y=2g+3f$
 будетъ

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 x=f=1 & 3 & 11 & 41 \\
 y=g=1 & 5 & 19 & 71 \\
 p=0 & 1 & 5 & 20 \\
 q= & 1 & 10 & 12 \\
 \text{или } q=0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{21}{3}
 \end{array}$$

потому что $q = -\frac{2}{3}$.

895.

До сихъ мѣстъ принуждены были мы изъ предложенной формулы исключать второй членъ, когда онъ попался; но можно также предписанной способъ употребить и къ такой формулѣ, гдѣ будетъ средней членъ, что мы здѣсь показать намерены. Пусть предложенная формула, которая должна быть квадратъ, будетъ сия $axx + bx + c = y$ и пусть будетъ изъ оной случай уже извѣстенъ $aff + bf + c = gg$; вычти сіе уравненіе изъ прежняго, будетъ $a(xx - ff) + b(x - f) = y - gg$, что во множителяхъ изобразится такъ: $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. умножь съ обѣихъ сторонъ на pq , будетъ $pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, что на двѣ части раздроблено быть можетъ:

I $p(x-f) = q(y-g)$; II $q(ax+af+b) = p(y+g)$ умножь первое уравненіе на p , а другое на q , и вычти прежде изъ сего, то получится $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq - 2gpr$; отсюда найдемъ мы $x = \frac{2gpr}{aqq - pp} - \frac{(aqq + pp)f + bqq}{aqq - pp}$, а изъ другаго уравненія будетъ $q(y-g) = p(x-f) = \left(\frac{2gpr}{aqq - pp} - \frac{2afqq}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp} \right)$; слѣдовательно $y-g = \frac{2gpf}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - pp}$ итакъ $y-g = \frac{(aqq + pp)}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - pp}$; а для избѣжанія сихъ дробей, положи какъ и прежде $\frac{aqq + pp}{aqq - pp} = m$ и $\frac{2fpq}{aqq - pp} = n$, будетъ $m + 1 = \frac{2aqq}{aqq - pp}$, слѣдовательно $\frac{qq}{aqq - pp} = \frac{m+1}{2a}$, итакъ $x = ng - mf + b \frac{(m+1)}{2a}$, а $y = mg - paf - \frac{1}{2}n$, гдѣ

X 3

буквы

буквы m и n такого свойства быть должны, какъ и выше сего, т. е. чтобы
 $mn = an + 1$.

8, 6.

Но такимъ образомъ, найденныя формулы, вмѣсто x и y смѣшаны еще съ дробями; ибо члены содержаще буквы b суть дроби, и слѣдовательно съ нашимъ намѣреніемъ не сходны. Но надлежитъ примѣчать, что ежели онѣ сихъ величинъ къ слѣдующимъ придетъ, то оныя всегда будуще цѣлыя числа, и коныя изъ прежде взятыхъ чиселъ p и q очень легко найти можно; ибо возми p и q , такъ чтобы $pp = aqq + 1$, и тогда $aqq - pp = -1$, то сами собою дроби пропадутъ, и найдемся $x = -2grq + f(aqq + pp) + bqq$, а $y = -g(aqq + pp) + 2afpq + brq$; но понеже въ известномъ случаѣ $2ff + bf + c = gg$, квадратъ только изъ gg входящъ, то все равно дастъ ли буква g знакъ $+$, или $-$; и такъ поставь $-g$, вмѣсто g , то будуще наши формулы $x = 2grq + f(aqq + pp) + brq$ и $y = g(aqq + pp) + 2afpq + brq$ и тогда завершенно будетъ $axx + bxx + c = yy$.

Сыскаши

Сыскавъ наприим. такіа шестугольныя числа, кои бы были вдругъ и квадратныя?

Здѣсь должно быть $2xx - x = yy$, гдѣ $a=2$, $b=-1$, и $c=0$, извѣстной случай, какъ видно есть $x=f=1$ и $y=g=1$.

Помомъ надлежишь быть $pp = 2qq + 1$, булетъ $q=2$ и $p=3$, и такъ получится $x=12g+17f-4$ а $y=17g+24f-6$, откуда слѣдующія найдущя знаменования:

$$\begin{array}{l|l|l} x-f=1 & 25 & 841 \\ y=g=1 & 35 & 1189 \text{ и проч.} \end{array}$$

897.

Повудемъ еще нѣсколько при первой формулѣ, гдѣ средняго члена нѣтъ и рассмотримъ случаи, въ которыхъ формула $axx+b$, булетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

Пусть булетъ $axx+b=yy$ и къ сему потребны двѣ вѣщи.

I. Знать такой случай, въ которомъ се дѣлается: оной пусть булетъ $eff+b=gg$.

X 4

II.

II. Надлежитъ знать вмѣстѣ m и n такія числа, числѣ $mn = am + x$, о чемъ въ слѣдующей главѣ показано будетъ

Отсюда теперь получается новой случай, а именно: $x = ng + mf$ и $y = mg + af$, откуда попомѣ равнымъ образомъ другіе случаи сыскать можно. Коя мы представимъ такъ:

$$\begin{array}{l} x = f | A | B | C | D | E \\ y = g | P | Q | R | S | T \text{ и проч.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{дѣ } A = ng + mf | B = nP + mA | C = nQ + mB | D = nR + mC \\ \text{и } P = mg + af | Q = mP + aA | R = mQ + aB | S = mR + aC \\ \text{и проч.} \end{array}$$

которые оба рода чиселъ, легко можно продолжать далѣе, какъ кто пожелаетъ.

898.

Но по сему способу не можно продолжать верхняго ряду не зная нишняго, ниже нижняго, не зная верхняго. Но легко можно дать правило, верхней рядъ одинъ только продолжать не имѣя нужды знать нижней

нижней, которое правило служитъ также, и для нижняго ряду гдѣ не нулю, знать верхней. Цѣлыя числа, которыя вмѣсто x брать можно, идутъ въ извѣстной прогрессіи, коей каждой числѣ напр. E , изъ двухъ предвѣдущихъ C и D опредѣляется, не имѣя нужды знать нижнѣе числа R и S ; ибо тогда $E = 2mD - mnC + anC$ или $E = 2mD - (mn - an)C$, а понеже $mn = an + 1$, слѣдовательно $mn - an = 1$, будетъ $E = 2mD - C$. Откуда явствуетъ, какимъ образомъ каждое изъ верхнихъ чиселъ опредѣляется изъ двухъ предвѣдущихъ. равнымъ образомъ тоже бываетъ и съ нижнимъ рядомъ; такъ $T = mS + anD$, но $D = nR + mC$, будетъ $T = mS + an(nR + mC)$, и когда еще $S = mR + anC$, то $anC = S - mR$, которую величину поставивъ вмѣсто anC получимъ, $T = 2mS - R$, такъ что нижній рядъ по тому же правилу, какъ и верхней продолжается.

Найти наприм. всѣ числа x , чтобъ $2xx - 1 = yу$, здѣсь $f = 1$ и $g = 1$, при шомъ

Х 5

тн

$mm - 2m + 1$, будешь $n = 2$ и $m = 3$. И по-
 неже $A = 5$, то первые два члена 1 и 5,
 изъ которыхъ слѣдующіе по сему прави-
 лу найдутся: $E = 6 D = 5$, т. е. каждый
 членъ взятой 6 разъ и уменьшенъ предъ-
 идущимъ дастъ слѣдующей; и такъ иско-
 мыя числа вмѣсто x идущіе по сему пра-
 вилу такимъ образомъ: 1, 5, 29, 169,
 985, 5741 и проч.; откуда видно, что
 сти числа бесконечно далеко продолжаться
 могутъ. А ежели бы захотѣли взять
 дроби, то по предъсказанному спо-
 собу еще бы бесконечно большее множе-
 ство найти можно было.



ГЛАВА VII.

О особливомъ способѣ, формулу $am + 1$
 изъбавить квадратомъ въ цѣлыхъ числахъ.

899.

Предложеннаго въ прежней главѣ въ
 дѣйство произвести нельзя, ежели не
 въ состоянціи найти для каждаго числа a
 такого

такого n , что бы $an+1$ было квадратъ,
или что бы $an+1=mn$.

Когда же пожелаешь довольствоваться
ломаными числами, то сие уравненіе
легко рѣшить можно. Ибо положи
только $n=1+\frac{pr}{q}$, будетъ $mn=1+\frac{2pr}{q}$
 $+ \frac{mrr}{qq} = an+1$, гдѣ на обѣихъ сто-
ронахъ 1 уничтожается; а остальные
члены на q могутъ раздѣлиться. Поимъ
умноживъ на qq выдетъ $2rq+pr=anq$,
откуда найдется $n = \frac{2rq}{aq-p}$, откуда без-
конечное множество знаменований вмѣ-
сто n найдется. Но понеже n цѣлое
число быть должно, то сие намъ ни-
мало не помогаетъ, и слѣдовательно
для нахождения сего надлежитъ употре-
битьъ совсемъ особый способъ.

900.

Прежде всего надлежитъ примѣчать,
что ежели $an+1$ должно быть квадратъ
въ цѣлыхъ числахъ, какое бы a число
ни

ни было, по сему не всегда спастись можно: ибо впервыхъ всѣ пѣ случаи изключаются, въ которыхъ a отрицательное число, потомъ также и всѣ пѣ, гдѣ a квадратъ. Понеже иногда an было бы квадратъ, но никакой квадратъ b и вмѣстѣ квадрата нѣ цѣлыхъ числахъ не дѣлается, и по сему формула наша должна быть такъ ограничена, чтобъ буква a , не была ни отрицательною, ни квадратомъ; но когда a есть положительное и припомъ не квадратное число, то можно завсегда вмѣсто n такое цѣлое найти число, чтобъ $an + x$ было квадратъ.

Естьли такое число сыскано, то изъ прежней главы легко можно вывести бесконечно много другихъ, но къ нашему намѣренію довольно будетъ найти нѣкоторыя и припомъ самыя малыя.

901.

Для сего нѣкогда ученой Англичанинъ ичменъ Пель весьма остроумной способъ изобрѣлъ, которой мы здѣсь изъ

изъяснить намѣрены. Оной есть такого свойства, что не для каждаго числа a вообще, но для каждаго случая его особливо употреблять можно. И такъ начнемъ съ послѣднихъ случаевъ и будемъ искать вмѣсто n такое число, чѣмъ $2nn+1$ квадратъ было, или чѣмъ $\sqrt{(2nn+1)}$ было извлекаемое число.

Здѣсь легко видѣть можно, что сей квадратной корень будетъ больше нежели n , а менѣе нежели $2n$; что ради положи сго $=n+p$, гдѣ p заподлинно должно быть меньше нежели n . И такъ имѣемъ мы $\sqrt{(2nn+1)} = n+p$, слѣдственно $2nn+1 = nn+2np+pp$, откуда найдемъ n ; но $nn = 2np+pp-1$, слѣдовательно $n = p + \sqrt{(2pp-1)}$.

Здѣсь главное дѣло состоитъ въ томъ, чѣмъ $2pp-1$ было квадратъ, что учинится положивъ $p=1$, и найдетъся $n=2$, а $\sqrt{(2nn+1)}=3$. Ежели бы сіе не такъ скоро вышло, то можно бы продолжать далѣе, и когда $\sqrt{(2pp-1)}$ больше нежели p и слѣдовъ n больше нежели $2p$, то
положи

положи $n = 2r + q$ и будетъ $2r + q = \sqrt{4rp - 1}$, или $r + q = \sqrt{2rp - 1}$ взявъ квадраты получимся $rr + 2rq + qq = 2rp - 1$, или $rr = 2rq + qq + 1$, будетъ $r = q + \sqrt{2qq + 1}$, и такъ $2qq + 1$, должно быть квадратное число, что учинится когда $q = 0$, слѣдовательно $r = 1$ и $n = 2$. Изъ сего примѣра можно уже имѣть понятие о семъ способѣ, которой еще больше изъясненъ будетъ въ слѣдующаго.

§ 2.

Пусть будетъ $a = 3$ и что сія формула $3nn + 1$ должна быть квадратъ, по положи $\sqrt{3nn + 1} = n + p$ будетъ $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ и $2nn = 2np + pp - 1$, отсюда $n = \frac{p + \sqrt{3pp - 2}}{2}$, но понеже $\sqrt{3pp - 2}$ больше нежели p и слѣдовательно n больше, нежели $\frac{p}{2}$ или p , то положи $n = p + q$, будетъ $2p + 2q = p + \sqrt{3pp - 2}$ или $p + 2q = \sqrt{3pp - 2}$, взявъ квадраты выдемъ $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$, или $2pp = 4pq + 4qq + 2$ т. е. $pp = 2pq + 2qq + 1$; по чему $p = q + \sqrt{2qq + 1}$ сія формула данной равна, и
слѣдо-

слѣдовательно $q=0$, откуда $p=1$,
 $n=1$ и $V(3m+1)=2$.

903.

Пусть будетъ $a=5$ и формулу $5m+1$ зѣлать квадратомъ, котораго корень больше, нежели $2n$, то положи $V(5m+1)=2n+p$ и получится $5m+1=4n^2+4np+pp$, а $m=4n^2+pp-1$, слѣдовательно $n=2p+V(5pp-1)$. Но понеже $V(5pp-1)$ больше нежели $2p$, то и n также больше нежели $4p$; чего ради возьми $n=4p+q$, будетъ $2p+q=V(5pp-1)$ или $4pp+4pq+qq=5pp-1$; откуда $pp=4pq+qq+1$, почему $p=2q+V(5qq+1)$ сіе учинится когда $q=0$, слѣдовательно $p=1$ и $n=4$ и такъ $V(5m+1)=9$.

904.

Положимъ еще $a=6$, чтобы $6m+1$ было квадратомъ, котораго корень больше нежели $2n$, то возьми $V(6m+1)=2n+p$ будетъ $6m+1=4n^2+4np+pp$ или $2m=4n^2+pp-1$, слѣдов. $n=p+\frac{V(6pp-2)}{2}$

или $n=\frac{2p+V(6pp-2)}{2}$; почему и больше

нежели

нежели $2p$; для того положи $n = 2p + q$ будетъ $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$, или $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$: взявъ квадраты выдетъ $4^2p + 8pq + 4qq = 6pp - 2$, или $2pp = 8pq + 4qq + 2$, или $pp = 4pq + 2qq + 1$; откуда найдется $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$, которая формула первой равна и слѣдов. можно положить $q = 0$, выдетъ $p = 1$, $n = 2$ по чему $\sqrt{(6nn + 1)} = 5$.

905.

Пусть еще $a = 7$ и $7nn + 1 = nm$, слѣдов. m больше нежели $2n$; чего ради положи $m = 2n + p$, будетъ $7nn + 1 = 4n^2 + 4np + pp$, или $3nn = 4np + pp - 1$; откуда найдется $n = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$; но понеже n больше нежели $\frac{1}{3}p$ и слѣдов. больше нежели p , то возми $n = p + q$, будетъ $p + 3q = \sqrt{(7pp - 3)}$; взявъ квадраты выдетъ $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; $6pp = 6pq + 9qq + 3$, или $2pp = 2pq + 3qq + 1$, отсюда найдется $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$, но понеже здѣсь p больше нежели $\frac{1}{2}q$, и слѣдов. больше

нежели q , то поставь $p = q + r$.
 будетъ $q + 2r = \sqrt{7qq + 2}$ взявъ квадра-
 ты $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$, или $6qq = 4qr$
 $+ 4rr - 2$, или $3qq = 2qr + 2rr - 1$, по чему най-
 дется $q = \frac{r + \sqrt{7rr - 1}}{2}$; но понеже q
 больше нежели r , то положи $q = r + s$,
 будетъ $2r + 3s = \sqrt{7rr - 3}$ взявъ квадра-
 ты $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, или $3rr = 12rs$
 $+ 9ss + 3$ и $rr = 4rs + 3ss + 1$ слѣдов.
 $r = 2s + \sqrt{7ss + 1}$, и сія формула пре-
 жней равна, то возьми $s = 0$ и получится
 $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ и $n = 3$ откуда $m = 8$.

Сіе изчисленіе можно сократить слѣ-
 дующимъ образомъ, что и въ другихъ
 случаяхъ мѣсто имѣетъ. Когда $7m + 1$
 $= 3n$, то n меньше нежели $3n$, чего
 ради возьми $m = 3n - p$, будетъ $7m + 1$
 $= 9n - 6np + pp$, или $2m = 6np - pp + 1$,
 отсюда $n = \frac{1p + \sqrt{7pp + 1}}{2}$, слѣдоват. n
 меньше нежели $3p$; для того положи $n = 3p$
 $- q$ будетъ $3p - 2q = \sqrt{7pp + 2}$, взявъ
 квадраты $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$ или
 $2pp = 12pq + 4qq + 2$ и $pp = 6pq + 2qq + 1$,
 откуда $p = 3q + \sqrt{7qq + 1}$, здѣсь за-
 толь II. Ц разъ

равѣ поставивъ можно $q=0$, будетъ $r=1$
и $n=3$, наконецъ $m=8$ какъ и прежде.

906.

Возмемъ еще $a=8$ такъ чиповы $8n+1=m$, по чему m меньше нежел^я
 $3n$, для того положи $m=3n-p$, будетъ
 $8n+1=9n-6p+r$, или $n=6p-r+1$;
откуда $n=3p+V(8pr+1)$, ко-
торая формула равна первой, по мо-
жно положить $p=0$, и получится $n=1$,
а $m=3$.

907.

Равнымъ образомъ поступай съ
каждымъ другимъ числомъ a , ежели
только оно положишесльнос и не квад-
ратъ, то придеши на концѣ на такой
коренной знакъ, которой съ предложен-
ною формулою сходенъ, какъ наприм.
сей $V(ait+1)$, гдѣ должно положить
 $t=0$, въ которомъ случаѣ неизвѣсто-
мость пропадетъ, а попомъ возвраща-
ясь назадъ получишь величину для n ,
чиповъ $ait+1$ было квадратъ.

Иногда

Иногда скоро можно дойти до желаемого, а иногда многія къ тому дѣйствія пребудутся по состоянію числа a , о которомъ извѣстныхъ признаковъ дать не можно, до числа 13 идешь нарочито скоро; а когда $a=13$, то вычисленіе будетъ гораздо пространнѣе, и для того не худо изяснить сей случай подробнѣе.

рѳ.

И по сему пусть будетъ $a=13$, такъ что должно быть $13m+1=nt$, понеже здѣсь nt больше нежели $9m$, слѣдов. t больше нежели $3n$, то возьми $m=3n+p$, будетъ $13n+1=9m+6np+3p$, или $4np=6np+3p-1$, откуда $n=\frac{3p+1}{4}$, по чему n больше нежели $\frac{1}{4}p$, и слѣдов. больше нежели p , то положи $n=p+q$, выдѣль $p+4q=V(13pp-4)$; взявъ квадраты $13pp-4=pp+8pq+16qq$, $12pp-8pq+16qq+4$ раздѣливъ на 4, $3pp=2pq+4qq+1$, откуда $p=\frac{q+V(13q^2+1)}{3}$. Здѣсь p больше нежели $\frac{q+1}{3}$, слѣдов. больше нежели q ; и такъ возьми $p=q+r$ будетъ $2q+3r=V(13qq+3)$ взявъ, квадраты,

II 1

13qq

$13qr + 3 = 4q + 12qr + 9rr$, т. е. $9qr = 12qr + 9rr - 3$; раздѣливъ на 3, $3qr = 4q + 3rr - 1$, откуда $q = \frac{3r + \sqrt{13rr - 31}}{3}$, гдѣ q больше нежели $\frac{3r + \sqrt{13r}}{3}$, и слѣдов. больше нежели r , чего ради положи $q = r + s$ будетъ $r + 3s = \sqrt{13rr - 31}$; взявъ квадраты $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, или $12rr = 6rs + 9ss + 3$ раздѣливъ на 3; $4rr = 2rs + 3ss + 1$, отсюда $r = \frac{s + \sqrt{13ss + 1}}{2}$. Здѣсь r больше нежели $\frac{s + \sqrt{13s}}{2}$, или s , для того возми $r = s + t$, будетъ $3s + 4t = \sqrt{13ss + 4}$; взявъ квадраты $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ и $4ss = 24st + 16tt - 4$, раздѣливъ на 4 получимся $ss = 6st + 4tt - 1$, почему $s = 3t + \sqrt{13tt - 1}$, и слѣд. s больше нежели $3t + 3t$, или $6t$, чего ради положи $s = 6t + u$, будетъ $3t + u = \sqrt{13tt - 1}$; взявъ квадраты, $13tt - 1 = 9t^2 + 6tu + u^2$, откуда $4tt = 6tu + u^2 + 1$ и $t = \frac{u + \sqrt{13uu + 1}}{4}$, гдѣ t больше нежели $\frac{u}{4}$, и слѣдов. больше нежели u , для того положи $t = u + v$, будетъ $u + 4v = \sqrt{13uu + 4}$; взявъ квадраты получимся $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ и $12uu = 8uv + 16vv$

$+16uv-4$, раздѣливъ на 4, выдѣлѣ $3uv$
 $= 2uv + 4uv - 1$; почему $u = \frac{v + \sqrt{(1-4uv-1)}}{2}$,
 гдѣ u больше нежели $\frac{1}{2}v$, и слѣдов.
 больше нежели v , то положи $u = v + x$,
 будетъ $2v + 3x = \sqrt{(13uv-3)}$, взявъ ква-
 драаты $13uv-3 = 4v^2 + 12vx + 9x^2$, или
 $9uv = 12vx + 9x^2 + 3$, раздѣливъ на 3,
 $3uv = 4vx + 3x^2 + 1$, откуда $v = \frac{1x + \sqrt{(1-12x+3x^2)}}{3}$,
 гдѣ v больше нежели $\frac{1}{3}x$, и слѣдов. боль-
 ше нежели x , для того положи $v = x + y$,
 будетъ $x + 3y = \sqrt{(13xx+3)}$ взявъ ква-
 драаты $13xx + 3 = 4x^2 + 6xy + 9y^2$, или
 $12xx = 6xy + 9y^2 - 3$, раздѣливъ на 3
 выдѣлѣ $4xx = 2xy + 3y^2 - 1$ и $x = \frac{y + \sqrt{(1-2y-4y^2)}}{2}$,
 гдѣ x больше нежели y , для того поло-
 жи $x = y + z$, будетъ $3y + 4z = \sqrt{(13yy+4)}$,
 взявъ квадраты $13yy + 4 = 9y^2 + 24yz + 16zz$,
 или $4yy = 24yz + 16zz + 4$, раздѣливъ на 4
 $yy = 6yz + 4zz + 1$, отсюда $y = 3z + \sqrt{(13zz+1)}$
 и сія формула наконецъ ра-
 вна первой, то положи $z = 0$ и возвра-
 щаясь назадъ, получишь какъ слѣдуетъ:

$$z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = 1 + z = 1$$

$$v = x + y = 2$$

$$\text{Ц } 3$$

$$u = v$$

$$u = v + x = 3$$

$$t = u + v = 5$$

$$s = 6t + u = 33$$

$$r = s + t = 38$$

$$q = r + s = 71$$

$$p = q + r = 109$$

$$n = p + q = 180$$

$$m = 3n + p = 649$$

слѣдов. 180 послѣ o есть самое меньшее
цѣлое число вмѣсто n , чѣмобъ $13n + 1$
было квадратъ.

909.

Изъ сего примѣра довольно явствуетъ,
сколь продолжительно иногда та-
кое вычисленіе бывастъ, а въ большихъ
еще числахъ требуется въ десять разъ
больше дѣла, нежели сколько было при
числѣ 13, да и невозможно напередъ ви-
дѣть при какихъ числахъ столь великой
трудъ надобенъ; для того труды дру-
гихъ надлежитъ употреблять въ свою
пользу и здѣлать таблицу, гдѣ для
всѣхъ чиселъ, а отъ 1 до 100 знамено-
ванія буквъ m и n изображены, дабы въ
случаѣ

случай можно было взять для каждаго числа a надлежащія буквы m и n .

910.

Между числами надлежитъ примѣчать, что при нѣкоторыхъ родахъ чиселъ знаменитыя числа m и n вообще найпи можно; но сіе дѣлается при числахъ только чотвухъ, которыя единицею или двумя меньше, или больше квадратнаго числа, что особливо досшойно показанія.

911.

По сему пустьъ будетъ $a = ee - 2$, или двумя меньше квадратнаго числа, и должно быть $(ee - 2)mn + 1 = mm$; то явно есть, что m меньше нежели en , для того положи $m = en - p$. будетъ $(ee - 2)mn + 1 = een - 2enp + pp$, или $2m = 2enp - pp + 1$ и отсюда $n = \frac{ep + \sqrt{(epp - 2pp + 1)}}{2}$, гдѣ сразу видно что взявъ $p = 1$ коренной знакъ уничтожится и будетъ $n = e$, а $m = ee - 1$.

Когда бы было напримъ $a = 23$, гдѣ $e = 5$, то будетъ $23mn + 1 = mm$; есели

и 4

$n = 5$

$n=5$ и $m=24$, то само чрезъ себя такъ же явствуетъ, что положи́въ $n=e$ т. е. когда $a=ee-2$, выде́тъ $ann+1=e^2-2e+1$ квадратъ изъ $ee-1$.

912.

Пусть буде́тъ $a=ee-1$, т. е. единицею менше квадратнаго числа и должно быть $(ee-1)m+1=mm$; но вѣдь опять m менше нежели en , для того положи $m=en-p$, буде́тъ $(ee-1)m+1=eep-2ep+pp$, или $mm=2ep-pp+1$, отсюда $n=ep+V(eep-pp+1)$ гдѣ коренной знакъ уничтожится, когда $p=1$ и получится $n=2e$, а $m=2ee-1$. Слѣдетъ вѣдь можно; ибо когда $a=ee-1$ и $n=2e$, то $ann+1=4e^2-4ee+1$ квадратъ изъ $2ee-1$. Пусть на прим. $a=24$ такъ что $e=5$, найде́тся $n=10$ и $24m+1=2401=49^2$.

913.

Положимъ еще $a=ee+1$, или 1 цѣю больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+1)m+1=mm$, гдѣ m , какъ видно, больше нежели en , для того возми $m=ne+1-p$

$+p$, будетъ $(ee+1)nt+1 \equiv eent+2enp+pr$, или $nt \equiv 2enp+pr-1$, откуда $n \equiv ep+V(eerr+pr-1)$, гдѣ $p \equiv 1$ взять должно и выдѣль $n \equiv 2e$, $m \equiv 2ee+1$. Сіе легко усмотрѣть можно ибо когда $a \equiv ep+1$ и $n \equiv 2e$, то $ant+1 \equiv 4e^2+4ee+1$ квадратъ изъ $2ee+1$. Возми на прим. $a \equiv 17$ такъ что $e \equiv 4$, будетъ $17nt+1 \equiv mt$, когда $n \equiv 8$ и $m \equiv 33$.

914.

Пусть будетъ наконецъ $a \equiv ee+2$, или двумя больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+2)nt+1 \equiv mt$. Здѣсь видно, что m больше нежели en , чего ради положи $m \equiv en+p$, выдѣль $eent+2nn+1 \equiv eent+2enp+pr$ или $2nn \equiv 2enp+pr-1$, отсюда $n \equiv \frac{ep+V(eerr+pr-1)}{2}$; возми тѣснѣе $p \equiv 1$ будетъ $n \equiv e$ и $m \equiv ee+1$, по чему видно, что если $a \equiv ee+2$ и $n \equiv e$, будетъ $ant+1 \equiv e^2+2ee+1$ квадратъ изъ $ee+1$. Положимъ на прим. $a \equiv 11$, такъ что $e \equiv 3$, по получившя $11nt+1 \equiv mt$, когда $n \equiv 3$ и $m \equiv 10$; еслили же бы похотѣли взять $a \equiv 83$, то было бы $e \equiv 9$, и найдется $83nt+1 \equiv mt$, когда возьмется $n \equiv 9$ и $m \equiv 82$.

Ц 5

Таблица

Таблица чисел m и n , вычисленныхъ
для всѣхъ величинъ числа a отъ 2 до 100,
такъ что $m = an + 1$

a	n	m	a	n	m
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
4	4	9	32	3	17
5	2	5	33	4	23
6	3	8	34	6	35
7	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	19	38	11	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	1	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24336
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24			
24	1	5	50	14	99
			51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

№	п	п	г	п	п
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	7	9
59	69	510	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319040	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	179	87	3	28
66	8	65	88	21	107
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	916	7775	91	161	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2181240	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10



ГЛАВА VIII

О способѣ не извлекаемую формулу $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}$, здѣлать раціональною.

915.

Мы приступаемъ теперь къ формулѣ, въ которой x до передачи снѣженіи возвышенъ, а потомъ пойдемъ далѣе къ четвертой, не смотря на то что снѣоа случая подобнымъ образомъ разсматривать должно.

И такъ пусть снѣ формулу $a+bx+cx^2+dx^3$ квадратомъ здѣлать надлежитъ. На сей консуъ поиребны надлежаще величины вмѣсто x въ раціональныхъ числахъ, и понеже въ семъ болѣе уже затрудненіе бываетъ, то требуется также болѣе и искусства находить только ломаныя числа вмѣсто x и ими при-
нуждены довольствоваться, а не требовать рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ. Прже всего примѣчать здѣсь должно, что
никакого

никакого всеобщаго рѣшенія дать не лѣзя, какъ то прежде было; но каждое дѣйствіе дастъ намъ знать одно только значеніе вмѣсто x , когда напрошивъ того прежней способъ ведетъ вдругъ къ бесконечно многимъ рѣшеніямъ

916.

Когда въ преждепоказанной формулѣ $a+bx+cx^2$ было бесконечно много случаевъ, гдѣ рѣшенія совсемъ невозможны, то случается сіе гораздо чаще съ теперешнею формулою. гдѣ ни объ одномъ рѣшеніи упоминаеть не лѣзя, ежели одного еще неизвѣстно или неугадано; того ради для сихъ только случаевъ дать мы правча въ состояніи, помощію которыхъ изъ одного извѣстнаго рѣшенія новое найти можемъ, изъ котораго потомъ равнымъ образомъ другое новое найдется, и сіе дѣйствіе далѣе продолжать можно.

Но между пѣрмъ часто случается что хотя одно рѣшеніе и извѣстно, то однакожъ

накожѣ изъ онаго о другомъ заключаѣ
не лзя , такъ что въ семъ случаѣ од-
но только рѣшеніе мѣсто имѣетъ , ко-
торое обстоятельство особливо прѣ-
мѣчанія достойно. Ибо въ предѣ идущемъ
случаѣ изъ одного рѣшенія безконечно
много новыхъ найти можно было.

917.

И такъ когда сія формула $a+bx+cx^2+dx^3$ должна быть квадратъ , то
непрѣменно нужно одинъ уже случай
знать , въ которомъ она квадратомъ
бываетъ. Такой случай легко видѣть мо-
жно, ежели первый членъ будетъ квадратъ,
и формула изобразится такъ : $ff+bx+cx^2+dx^3$, которая по видимому будетъ квад-
ратъ , когда положится $x=0$.

Для того взявъ во первыхъ сію фор-
мулу рассмотримъ какимъ образомъ изъ
извѣстнаго случая $x=0$ другое знамено-
ваніе вмѣсто x найти можно. Сіе мо-
жемъ мы совершить двумя образами ,
изъ которыхъ каждой особливо изъяснимъ
мы

мы э.бсь нацѣрены, припомѣ не худо
будетѣ здѣлать начало съ особенныхѣ
случаяхѣ.

918.

Пусть сѣю формулу $1+2x-xx+x^2$
надлежитѣ здѣлать квадратомѣ. Поне-
же здѣсь первой членѣ 1 есть квадратѣ,
то возми корень сего квадрата такѣ,
чтобѣ первые члены уничтожились; и
для того положи квадратной корень
 $=1+x$, когда квадратѣ нашей фор-
мулѣ долженѣ быть равенѣ и полу-
чится $1+2x-xx+x^2=1+2x+xx$, гдѣ
переднѣ два члена уничтожаются и выхо-
дитѣ сѣ уравненѣ $xx=-xx+x^2$, или
 $x^2=2xx$; раздѣливѣ на xx получится
 $x=2$, почему формула наша будетѣ
 $1+4-4+8=9$.

Равнымѣ образомѣ когда сѣя формула
 $4+6x-5xx+3x^2$ должна быть квадратѣ,
то положи корень $=2+nx$, и опредѣли n
такѣ чтобѣ оба первые члена уничтожи-
лись. Понеже $4+6x-5xx+3x^2=4+4nx+$
 nx^2 , то должно быть $4n=6$, слѣдов. $n=\frac{3}{2}$;
ощѣ

откуда слѣдующее уравненіе выходитъ,
 $-5xx + 3x^2 = \frac{1}{2}xx$, или $3x^2 = \frac{7}{2}xx$; откуда
 $x = \frac{2}{5}$, которое знаменованіе дѣлаетъ
 формулу нашу квадратурою, корню ко-
 рень $= 2 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}$.

919.

Другой способъ состоитъ въ томъ,
 чтобы въ корнѣ были 3 члена, जो
 $f+gx+bx^2$, кои бы такого были свой-
 ства, чтобы въ уравненіи т.е. передніе
 члены уничтожились.

Пусть дана наприм. слѣдующая фор-
 мула: $1-4x+6xx-5x^3$; положивъ корень
 ея $= 1-2x+bx^2$, должно быть $1-4x$
 $+6xx-5x^3 = 1-4x+4xx-4\frac{1}{2}x^2+bx^3$, гдѣ
 $+4xx$
 первые два члена пропадаютъ, а чтобы
 и третій уничтожился, то надлежитъ
 быть $6=2b+4$ и слѣдов $b=1$; отсюда
 получаемъ мы $-5x^3 = -4x^3+x^3$, раздѣ-
 ливъ на x^3 получимъ $-5 = -4+x$ и x
 $= 1$.

920.

Сии два способа употреблять можно когда первой членъ a есть квадратъ, и имѣетъ свое основаніе на томъ, что по первому способу дастъ два члена въ корнѣ, какъ $f+px$, гдѣ f квадратной корень перваго члена; а p берется такъ чтобъ второй членъ уничтожился и слѣдов. третей только и четвертой члены нашей формулы т. е. $cx+dx^2$ сравнивать должно съ $prxx$, и тогда раздѣливъ уравненіе на xx выдѣстъ новое знаменованіе вмѣсто x , которое будетъ $=\frac{px-c}{d}$. Во второмъ способѣ берется при членѣ корня и полагается оной $=f+px+qxx$ т. е. когда $a=ff$, а p и q опредѣляются такъ, чтобъ первые 3 члена уничтожились, что дѣлается такимъ образомъ: когда $ff+bx+cx+dx^2 = ff+2fp+2fqxx+2pqx^2+qqx^3$ то должно $b=2fp$, слѣдов. $p=\frac{b}{2f}$; а $c=2fq+pp$, слѣдов. $q=\frac{c-pp}{2f}$, а осталь-

Тамъ II.

Ч

ное

нос $dx^2 = 2pqx^1 + qqx^2$ можетъ раздѣлиться на x^1 и найдется $x = \frac{d-2pq}{4q}$.

921.

Между тѣмъ часто случается, что хотя $b = ff$; однакожъ по симъ способамъ величины вмѣсто x опредѣлить нельзя, какъ въ сей формулы $ff + dx^2$ явствуетъ, гдѣ второго и третьяго члена нѣтъ; ибо положи по первому способу корень $f + px$ такъ чтобы $ff + dx^2 = ff + 2fpx + p^2x^2$, то должно быть $0 = 2fp$ и $p = 0$, откуда получится $dx^2 = 0$, и $x = 0$, что не дастъ новаго знаменованія.

А ежели возмется корень по второму способу $f + px + qxx$ такъ чтобы $f + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^1 + qqx^2 = ff + dx^2$, то выйдетъ $0 = 2fp$, $p = 0$ и $2fq + pp = 0$ слѣдовательно $q = 0$, откуда $dx^2 = 0$ и пакы $x = 0$.

922.

Въ такихъ случаяхъ инаго дѣлать нѣчего, какъ только что смотрѣть
не

не можно ли отгадать такой величины вместо x , чтобы формула была квадратъ, а изъ нее уже потомъ можно найти по прежнему способу новую величину вместо x ; что также учинится можно, хотя первый членъ и не квадратъ.

Для показанія сего положимъ что формула $3+x^2$ должна быть квадратъ, сие учинится если $x=1$; итакъ положивъ $x=1+y$ получится сія формула $4+3y+3y^2+y^3$, въ которой первый членъ есть квадратъ; для того положи корень онаго по первому способу $2+py$, будетъ $4+3y+3y^2+y^3=4+4py+ppyy$, гдѣ для уничтоженія вѣселаго члена должно быть $3=4p$ слѣдов. $p=\frac{3}{4}$ и получится $3+y-\frac{3}{4}y^2$, $-y-\frac{3}{4}y^2-3=-\frac{15}{4}-\frac{15}{4}y=-\frac{15}{4}(1+y)$ почему $x=-\frac{15}{4}$ новая величина вместо x .

Положи еще по второму способу корень $=2+py+qy^2$ будетъ $4+3y+3y^2+y^3=4+4py+4py^2+4p^2y^2+4pqy^3+4q^2y^4$, гдѣ для уничтоженія вѣселаго члена должно быть $3=4p$, или $p=\frac{3}{4}$, а чтобы третей членъ

членъ уничтожимъ, то $3 = 4q + pr$, слѣдов.
 $q = \frac{3-pr}{4} = \frac{11}{4}$ и будетъ $1 = 2pq + qqr$, по-
 куда $r = \frac{1-2pq}{q}$, или $r = \frac{11}{11}$; слѣдов. $x = \frac{11}{11}$.

923.

Теперь покажемъ, когда уже одна
 величина сыскана, какимъ образомъ дру-
 гую новую находить должно. Сіе пред-
 ставимъ мы вообще въ сей формулѣ
 $a + bx + cxx + dx^3$, о которой уже извѣ-
 стно, что она будетъ квадратъ, еже-
 ли $x = f$, и что тогда будетъ $a + bf$
 $+ cff + df = gg$, попомъ положи $x = f + y$,
 то получится сія новая формула,

$$\begin{aligned} & a \\ & + bf + by \\ & + cff + 2cfy + cyy \\ & + df + 3dffy + 3dfyy + dy^3 \end{aligned}$$

$gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3dfy + dy^3)$,
 въ которой формулѣ первой членъ сѣтъ
 квадратъ и слѣдов. оба прежніе способа
 употребить можно; чрезъ что новые
 величины вмѣсто y и слѣдовательно так-
 же вмѣсто x получатся, а именно $x = f + y$.

924

924.

Но иногда сіе совсемъ ничего не помагаеиъ, хотя величину вмѣсто x и опгадаиъ, какъ то въ сѣй формулѣ дѣлаеиъся $1+x^2$, которая будеиъ квадратъ, ежели возмеиъся $x=2$, и такъ полагая $x=2+y$ выдеиъ сѣя формула $9+12y+6yy+y^2$, которая должна быиъ квадратъ, коего корень по первому способу пусть будеиъ $3+py$, то $9+12y+6yy+y^2=9+6py+ppyy$, гдѣ должно быиъ $12=6p$ и $p=2$; потомъ $6+y=pp=4$, слѣдов. $y=-2$ откуда $x=0$, изъ котораго знаменованія далѣе ничего найти не можнo. Но ежели возмеиъ корень по второму способу $3+p+qy$, будеиъ $9+12y+6yy+y^2=9+6py+\frac{6qx}{pp}+2pqu+y^2+qqy^2$, гдѣ должно быиъ во первыхъ $12=6p$ и $p=2$, потомъ $6=6q+pp=6q+4$, слѣдов. $q=\frac{1}{3}$; отсюда получится $1=2pq+qqy^2+\frac{1}{3}y$, почему $y=-3$, слѣдов. $x=-1$, а $1+x^2=0$, откуда далѣе ничего заключеиъ не лзя; ибо ежели бы положили $x=-1+\frac{1}{3}$, то вышла бы

и 3

сіа

сія формула $3x^2 - 3x - x^3$, гдѣ первой членъ совсемъ уничтожается и слѣдов. ни того ни другаго способу употребить не можно. Изъ сего довольно явствуетъ, что сія формула $1 + x^2$ квадратомъ быть не можетъ, выключая сіи 3 случая:

I) $x=2$, II) $x=0$, III) $x=-1$, что также и изъ другихъ основаній доказать можно.

925.

Для упражненія рассмотримъ еще сію формулу $1 + 3x^2$, которая въ сихъ случаяхъ будетъ квадратъ I) $x=0$, II) $x=1$, III) $x=2$: и поглядимъ можно ли еще другіе такіе величины найти.

Понже извѣстно, что $x=1$, по положи $x=1+y$ и получился $4 + 9y + 9yy + 3y^2$; изъ сего корень пусть будетъ $2 + py$, такъ что $4 + 9y + 9yy + 3y^2 = 4 + 4py + ppyy$, гдѣ $9=4p$, слѣдов. $p=\frac{9}{4}$, а остальные члены $9+3y = p^2y = \frac{81}{16}y$ и $y = -\frac{16}{13}$; по чему $x = \frac{5}{13}$. $1 + 3x^2$ слѣдов. будетъ квадратъ, котораго корень $= -\frac{6}{13}$, или также $= +\frac{6}{13}$. Если бы еще далѣе положить $x = \frac{5}{13} + z$, то
можно

можно бы было найти оппуда другія новыя величины. А естли бы за благо равсудилось положить корень прежней формулы по второму способу $= 2 + py + qyy$, такъ что бы $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^2 + qqy^3$, то должно бы быль $9 = 4p$, слѣдов: $p = \frac{9}{4}$, потомъ $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{4}$, по чему $q = \frac{63}{4}$; а изъ остальныхъ членевъ будетъ $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{16} + qqy$, или $576 + 128qqy = 384$, или $128qqy = -183$, или $126\frac{63}{4}y = -183$, или $42\frac{63}{4}y = -61$, будетъ $y = -\frac{1659}{1547}$, слѣдов. $x = -\frac{679}{1547}$, и по прежнему показанію другія новыя найдутся.

926.

Здѣсь изъ известнаго случая $x = 1$ вывели уже мы двѣ новыя величины, изъ которыхъ, естли кто на себя трудъ принять похочетъ, другія новыя найти можно; но чрезъ то попадетъ онъ на весьма большіе дроби.

Сего ради имѣемъ мы припчину удивляться, что изъ сего случая $x = 1$ не

Ч 4

можно

можно вывести другаго $x=2$, которой также легко виденъ, что безъ сомнѣнія есть знакомъ несовершенства найденнаго предъ симъ способа.

Также изъ случая $x=2$ можно найти другія новыя величины. На сей конецъ возми $x=2+y$, такъ что $25+36y+18yy+3y^2$ должно быть квадратъ, коего корень по первому способу, пусть будетъ $5+py$, то $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+ppyy$ и найдется $36=10p$, или $p=\frac{18}{5}$.

Прочіе же члены раздѣливъ на yy , дадутъ $18+3y=pp=\frac{324}{25}$, слѣдов. $y=\frac{10}{25}$, и $x=\frac{5}{25}$; по чему $1+3x^2$ будетъ квадратъ, коего корень есть $5+py=-\frac{111}{125}$, или $+\frac{111}{125}$. По второму же способу положивъ корень $5+py+qyy$ будетъ $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+\frac{10}{25}py^2+2pqy^2+qqy^2$, гдѣ для уничтоженія втораго и претьяго члена должно быть $36=10p$, или $p=\frac{18}{5}$; потомъ $18=10q+pp$ и $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, и $q=\frac{63}{125}$; остальные же члены раздѣливъ на y^2 дадутъ $3=2pq+qqy$,
или

или $qqy = 3 - 2pq = -\frac{399}{1347}$, слѣдов. $y = -\frac{377}{1307}$,
а $x = -\frac{609}{1347}$.

927.

Сіе вычисленіе продолжительно и трудно въ нѣхъ случаяхъ, гдѣ по другимъ основаніямъ очень легко общесрѣшеніе дать можно; какъ въ сей формулѣ $1 - x - xx + x^3$, адѣсь можно взять вообще $x = m - 1$, а n означаетъ каждое произвольное число. Когда $n = 2$, будетъ $x = 3$, и наша формула $1 - 3 - 9 + 27 = 16$ ежели возьмется $n = 3$, выдетъ $x = 8$ и формула наша $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Но адѣсь совсемъ особенное обстоятельство бываесть, отъ котораго сіе легкое рѣшеніе зависить, и которое легко усмотрѣть можно, ежели мы нашу формулу раздробимъ на множителей по увидимъ, что она на $1 - x$ раздѣлится и частное выдетъ $1 - xx$, которое еще состоить изъ сихъ множителей $(1 - x)(1 + x)$, такъ что наша формула получитъ сей видъ $1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2(1 + x)$. Если она

Ч 5

дол-

должна быть квадратъ , то понеже квадратъ раздѣленной на квадратъ, въ частномъ дастъ квадратъ , $1+x$ должно быть квадратъ ; и обратно когда $1+x$ квадратъ , то будетъ также $(1-x)^2(1+x)$ квадратъ , для того положи только $1+x=m$, то получится сразу $x=m-1$. Если бы сего обстоятельства примѣчено не было , то трудно бы по вышепоказаннымъ способамъ найти шесть только знаменований вмѣсто x .

928.

При каждой формулѣ весьма изрядное дѣло , раздѣляясь на множителей , ежели только возможно . Какимъ образомъ сіе дѣлается , о томъ уже выше показано ; а именно, положи данную формулу $=0$ и ищи корень сего уравненія; ибо тогда каждой корень наприм. $x=f$ дастъ множителя $f-x$, которое разысканіе пѣмъ легче здѣлать можно , когда ищутся здѣсь одни только раціональные корни , кои всѣ суть дѣлители чиселъ порожъ взятыхъ.

929

929.

Сие обстоятельство находится при нашей формулѣ $a+bx+cx^2+dx^3$, когда первые два члена уничтожатся, такъ чю cx^2+dx^3 должно быть квадратъ; но раздѣливъ сию формулу на x , частному, т. е. $c+dx$ неопмѣнно надлежитъ быть паки квадратомъ; положи $c+dx = m$, и найдется $x = \frac{m-c}{d}$, которое знаменованіе вдругъ бесконечно многія и притомъ всѣ возможныя рѣшенія въ себѣ содержитъ.

930.

Если при употребленіи втораго члена буквы p опредѣлять не похочешь, чюбы впорой членъ уничтожился, то попадешь на другую неизвлекаемую формулу, которую должно будсть зѣблать раціональною.

Пусть предложенная формула будетъ $ff+bx+cx^2+dx^3$; положи ся корень $= f+px$, и получится $ff+bx+cx^2+dx^3 = ff+2fpx+ppxx$, гдѣ первые члены уничтожатся, а остальные раздѣливъ на x , даюшъ

даюшъ $b+cx+dx^2=2fp+prx$, которое уравненіе естъ квадратное, отсюда найдется x какъ слѣдустъ: $dx^2=prx-cx+2fp-b$, слѣдов.

$$x = \frac{pp-c + \sqrt{p^2 - 2cpr + 8dfp + cc - 4bd}}{2d}.$$

Теперь дѣло состоитъ, чтобъ найти вмѣсто p , такіе величины, при которыхъ бы формула $p^2 - 2cpr + 8dfp + cc - 4bd$ была квадратъ. Но понеже здѣсь четвертая степень числа p попадаетъ, то надлежитъ сей случай до слѣдующей главы.

ГЛАВА IX.

О способѣ извлечь формулу $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$ изъвлечкою.

931.

Теперь пришли мы къ такой формулѣ, гдѣ неопредѣленное число x до четвертой степени возвышено, при чемъ должно намъ окончить разысканіе о квадратномъ

ратномъ коренномъ знакѣ : ибо столь далеко мы еще не дошли, чтобъ дѣлать квадратами такіе формулы, гдѣ вышіе степени числа x попадаются.

При сей формулѣ 3 случая входятъ въ разсужденіе, изъ коихъ первой бываетъ, когда первой членъ a квадратъ, другой ежели послѣдней членъ квадратъ; и на концѣ, когда первой и послѣдней вдругъ квадраты, которые 3 случая порознь разсмотрѣть мы здѣсь намѣрены.

§ 32.

I разрѣшеніе формулы $V(ff+bx+cx^2+dx^3+ex^4)$. Понесже здѣсь первой членъ квадратъ, то по первому способу можно положить корень $=f+px$ и p опредѣлить такъ, чтобъ оба первые члены уничтожились, а остальные бы на xx могли раздѣлиться; но однакожъ въ уравненіи было бы еще xx и слѣдов. при опредѣленіи числа x потребенъ бы былъ новый коренной знакъ: для того возмемъ заразъ второй способъ и положимъ корень

корень $= f + px + qxx$, потомъ буквы p и q такъ надлежишь опредѣлить, чюбъ три первыя члена вонъ вышли, а остальные бы на x^2 могли раздѣлиться; и тогда получится одно простое уравненіе, изъ котораго x безъ кореннаго знака опредѣлишь.

933.

По сему возми корень $= f + px + qxx$, и должно быть $ff + bx + cxx + dx^2 + ex^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^2 + qqx^2$, гдѣ $+ppxx$
 первыя члены сами собою уничтожаются; для втораго положи $b = 2fp$, или $p = \frac{b}{2f}$, для шретьяго члена должно быть $c = 2fq - 1 - pp$, или $q = \frac{c - pp}{2f}$, и по учиненіи сего остальные члены могутъ раздѣлиться на x^2 , и выдѣль сѣ уравненіе $d + ex = 2fq + qqx$, откуда найдется $x = \frac{d + 2fq}{4q - c}$.

934.

Но легко видѣть можно, что по сему способу ничего не найдется, есѣ
 ли

ли втораго и третяго члена въ формулѣ не будещъ, или когда $b=0$ и $c=0$; ибо тогда $p=0$ и $q=0$ слѣдовательно $\frac{d}{c}$, но изъ сего обыкновенно ничего новаго найти не лзя, а особливо когда и $d=0$, то получится $x=0$, которое знаменованіе ни мало не вспомоцествуетъ; по чему сей способъ для такихъ формулъ, какова $ff+ex^*$ ни мало не служитъ. Сіе самое обстоятельство бываещъ также, когда $b=0$ и $d=0$, или когда втораго и четвертаго члена нѣтъ; и формула имѣетъ такой видъ $ff+cx^2+ex^4$, тогда будещъ $p=c$, а $q=\frac{c}{4}$, откуда найдесться $x=0$, которое знаменованіе заразъ видно и ни къ чему дальсѣ насъ не ведесть.

935.

II разрѣшеніе формулы $V(a+bx+cx^2+dx^3+egx^4)$. Сію формулу можнобы тотчасъ привести къ первому случаю полагая $x=\frac{y}{2}$; но понеже тогда сія формула $a+\frac{b}{2}y+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{2}y^3+\frac{eg}{2}y^4$ должна быть квадратъ, то помноживъ на квадратъ y^2 надлежалобы оной вышши квадратомъ:

и получится $ay^2 + by^3 + cy^4 + dy + eg$, которая будучи написана наизворотъ, съ прежнею во всемъ сходствуетъ.

Но сие не нужно : корень можно положить и такъ $gxx + px + q$, или наизворотъ $q + px + gxx$. Будетъ $a + bx + cx^2 + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + 2gpx^2 + ggx^3 + p^2xx$.

Понемѣ здѣсь пятые члены сами чрезъ себя уничтожаются, то опредѣли сперва p такъ чтобъ и четвертые члены вонъ вышли ; что учинится когда $d = 2g$ или $p = \frac{d}{2g}$; потомъ опредѣлили еще q чтобъ и третіе члены уничтожились , что здѣлается полагая $c = 2gq + pp$, или $q = \frac{c - pp}{2g}$; по учиненіи же сего первые два члена дадутъ сие уравненіе $a + bx = qq + 2pqx$, откуда $x = \frac{a - qq}{2pq - b}$.

936.

Здѣсь опять попадаетъ прежде реченной недостатокъ , когда второго и четвертого

четвертого члена nb^2 , или когда $b=0$ и $d=0$; ибо выйдет тогда $p=0$, а $q=\frac{c}{ag}$ откуда $x=\frac{a+q}{g}$, кторая величина есть бесконечно большая и столь же мало слу- жипъ какъ и $x=0$ въ первомъ случаѣ. И такъ сего способа при уравненіяхъ $a+cx+gx^2$ употреблять не можно,

937.

III разрѣшеніе формулы $V(ff+bx+cx^2+dx^3+gex^4)$. Явно есипъ, что въ сей формулѣ оба прежніе способа упо- трѣбипъ можно; ибо первой членъ есипъ квадратъ, то положи корень $=f+px+qcx$, дабы первые 3 члена уничтожить; потомъ когда послѣдній членъ есипъ такъ же квадратъ, то можно взипъ корень $=q+px+gxx$, чтобы исключипъ 3 послѣд- ніе члена, слѣдов. двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Но можно сію формулу еще двумя другими способами разрѣшипъ, кои ей свойственны: по первому способу поло- жи корень $=f+px+gxx$ и опредѣли p
 Тако II. III такъ

такъ, чтобъ вторые члены уничтожились; поныже надлежитъ быть :

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^2 = ff + 2fpx + 2fgxx + 2gpx^2 + ggx^2, \text{ то возми } b = 2fp, \text{ или } p = \frac{b}{2f}, \text{ и тогда не только первые два чле-}$$

на, но и послѣдніе уничтожаются; а остальные раздѣливъ на xx даютъ сіе уравненіе $c + dx = 2fg + pp + 2gpx$, откуда $x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}$, или $x = \frac{pp - 2fg - c}{d - 2gp}$.

Здѣсь особливо примѣчать надлежитъ, что въ формулѣ попадася только квадратъ gg , коего корень g какъ отрицательный, такъ и положительной взять можно, по чему другая еще величина вмѣсто x получится: а именно

$$x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}, \text{ или } = \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}.$$

938.

Есть еще другой путь къ разрѣшенію сего формулы: а именно положи корень какъ и прежде $f + px + gxx$, и опредѣли p такъ чтобъ четвертые члены уничто-

уничтожились, и. е. если положится въ прежнемъ уравненіи $d = 2gr$, или $r = \frac{d}{2g}$, и понесе тогда первой членъ съ двумя послѣдними уничтожается, а остальные раздѣливъ на x даютъ сіе простое уравненіе $b + cx = 2fp + 2fgx + pr$, откуда $x = \frac{b - 2fp}{2fg + pr - c}$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что въ сей формулѣ находящіяся только квадраты ff , коего корень также и $-f$ брать можно, такъ что будетъ $x = \frac{b + 2fp}{pr - 2fg - c}$, по чему двѣ искомыя величины вмѣсто x найдутся, и слѣдовательно чрезъ показанныя до сихъ мѣстъ способы всѣхъ навсе 6 новыхъ величинъ вывести можно.

939.

Но здѣсь накіи скучное обстоятельство случается, когда втораго и четвертаго члена нѣтъ, или $b = 0$ и $d = 0$, то ни одной надлежащей величины вывести не можно, и слѣдов. сѣя

III 2

Фор-

формулы $ff + cxx + gga^4$ разбѣшкнть чрсѣѣ по не лѣзя ; ибо когда $b = 0$ и $d = 0$ то изѣ обѣихъ способовъ будетѣ $p = 0$ и по сему изѣ первого $x = \frac{c}{2a}$ равно бесконечному ; а изѣ другаго $x = 0$, изѣ коихъ далѣе ни чего найпи не можно.

910.

Сн сущъ 3 формулы вѣ которыхъ показанные до сихъ порѣ способы употреблять можно , но ежели вѣ предложенной формулѣ ни первой ни послѣдней членѣ не квадраты , то ни чего дѣлать, не лѣзя прежде нежели опгадана не будетѣ такая вмѣсто x величина, при копорой формула наша будетѣ квадратѣ.

Положимѣ что формула наша будетѣ квадратѣ , когда положишся $x = b$, такѣ что $a + bb + chb + db^2 + eb^3 = kk$, по возми шолько $x = b + v$, и получишся новая формула , вѣ которой первой членѣ kk квадратѣ и такѣ первой случай употребить можно. Сн превращеніе употребляшся такожде, когда уже вѣ предѣдущихъ случаяхъ знаменованіе вмѣсто x ,

x , какъ на прим. $x=b$, найдено ; ибо иногда надлежитъ только посправить $x=b+y$, то получится новое уравненіе , къ которому прѣдшіе способы употребить можно ; а изъ найденныхъ уже величинъ вмѣсто x другіе новые найдутся и съ сими новыми равнымъ образомъ поступать . и слѣдов. большіе величины вмѣсто x находить можно.

9+1.

Особливо же примѣчать должно о часто наминаемой формулѣ, гдѣ втораго и четвертаго члена не достаетъ , что ни какого рѣшенія надѣяться нельзя, ежели одного , такъ сказать, не отгадано; а какъ въ такомъ случаѣ поступать , то покажемъ сія формула $a+ex^2$, которая весьма часто попадается.

И по сему положи что уже величину $x=b$ нашли такъ , что будетъ $a+eb^2=kk$; а для нахождения другихъ возми $x=b+y$, то должна сія формула быть квадратъ $a+eb^2+4eb^1y+6eb^2y^2+4eb^3y^3+eb^4y^4$

Ш 3

+ey⁴

$+ey^4$, то есть $kk + 4eb^2y + 6ebbyy + 4eb^2y^2 + ey^4$, которая надлежит до перваго способа; чего ради положи квадратной ся корень $= k + py + qy^2$, и будетъ наша формула равна сему квадрату $kk + 2kpy + 2kqy^2$

$+ 2pry^2 + qqy^4$, гдѣ въпервыхъ p и q такъ опредѣлить должно, чтобъ второй и третей членъ уничтожились; для того должно быть $4eb^2 = 2kp$, слѣдов. $p = \frac{2eb^2}{k}$; $6ebby = 2kq + pp$; отсюда $q = \frac{6ebby - pp}{2k}$,

или $q = \frac{3ebbykk - 2eb^4}{k^2}$, или $q = \frac{ebb(3kk - 2eb^2)}{k^2}$,

или понеже $eb^2 = kk - a$, будетъ $q = \frac{ebb(kk + 2a)}{k^2}$,

Потомъ слѣдующіе члены раздѣливъ на y^2 дають $4eb + ey = 2pq + qqy$, откуда найдется $y = \frac{4eb - 2pq}{qq - e}$. Числитель сего

дроби получишь такую формулу

$\frac{4ebk^2 - 4eb^4(kk + 2a)}{k^2}$, которая, понеже $eb^2 = kk - a$, превратится въ сию

$4ebk^2$

$$\frac{4ebk^2 - 4eb(kk-a)(kk+2a)}{k^4}, \text{ или } \frac{4eb(-akk+2aa)}{k^4},$$

$$\text{или } \frac{4aeb(2a-kk)}{k^4}; \text{ а знаменатель } qq-e=$$

$$e \frac{(kk-a)(kk+2a)^2 - ekb}{kb} = e \frac{(3ak^2 - 4a^3)}{kb} =$$

$$\frac{ea(3k^2 - 4aa)}{kb}; \text{ откуда искомая величина}$$

$$\text{будетъ } y = \frac{4aeb(2a-kk) \cdot k^2}{k^4 \cdot ae(3k^2 - 4aa)}, \text{ т. е.}$$

$$y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^2 - 4aa}, \text{ слѣдов. } x = \frac{b(8akk - k^2 - 4aa)}{3k^2 - 4aa},$$

$$\text{или } x = \frac{b(k^2 - 8akk + 4aa)}{4aa - 3k^2}. \text{ Поставивъ сию}$$

величину въѣсто x , формула наша $a+ex^2$,
будетъ квадратъ, коего корень $k+py$
 $+quy$ и которой въ сию формулу обра-

$$\text{тился } k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^2 - 4aa}$$

$$+ \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^2 - 4aa)^2}; \text{ ибо изъ}$$

$$\text{прежняго } p = \frac{2eb^2}{k}, \quad q = \frac{ebb(kk+2a)}{k^2}$$

$$\text{и } y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^2 - 4aa}.$$

942.

Побудемъ еще при формулѣ $a+ex^*$, и когда извѣстной случай есть $a+eb^*=kk$, то можемъ мы, сего взять въ два случая, потому что какъ $x=-b$, такъ $x=+b$; и для того можемъ мы сию формулу превратить въ другую третьяго рода, въ которой первой и послѣдней членъ будутъ квадраты. Сие учинится полагая $x=\frac{b(1+y)}{1-y}$, которой прѣмъ намъ много вспомошествовалъ. И такъ формула наша будетъ $\frac{a'1-y^2+eb^*(1+y)^2}{(1-y)^2}$, или $\frac{kk+4'kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^2+kk y^4}{(1-y)^2}$ сего возьми квадратной корень по третьему случаю $\frac{k+p y-k y y}{(1-y)^2}$, такъ что числитель нашей формулы долженъ быть равенъ сему квадрату $kk+2kpy-2kkyy-2kpy^2+kk y^4$ и здѣлай, чтобъ въпорыч члены уничтожились, что учинится полагая $4kk-8a=2kp$, или $p=\frac{2kk-4a}{k}$,

остальные же члены раздѣливъ на yy , даюшъ $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, или $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$; но понеже $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, и $pk = 2kk - 4a$, то $y(8kk - 16a) = \frac{-4k^3 - 16akk + 16aa}{kk}$; отку-
да $y = \frac{-k^3 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, а чтобы найти отсюда x , то впервыхъ $x + y = \frac{k^3 - 8akk - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, $x - y = \frac{2k^3 - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, слѣдов.
 $\frac{x + y}{x - y} = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{2k^3 - 4aa}$; и такъ $x = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{3k^3 - 4aa}$. б. Съ тоже самое изъясненіе, которое мы нашли прежде.

943.

Для изъясненія сего примѣромъ, пусть будетъ дана сія формула $2x^2 - 1$, которая должна быть квадратъ. Здѣсь $a = 1$, $e = 2$ и извѣстной случай, въ которомъ сія формула будетъ квадратъ есть когда $x = 1$, слѣдов. $b = 1$ и $kk = 1$,

III 5

ш с.

т е. $k=1$; отсюда получаемъ мы развѣ
 новую величину $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$; но
 понеже числа x четвертая степень вхо-
 дитъ, то можно положить $x = +13$
 по чему $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Когда же сей случай возьмемъ за из-
 вѣстной, то будетъ $b=13$, $k=239$,
 откуда по предъсказанному новая вѣсто x ве-
 личина получится, а именно $x =$

$$\frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192103 - 4} \cdot 13 = \frac{815959713}{2447192159}$$

 13 слѣд. $x = \frac{10607469769}{2447192159}$.

944

Подобнымъ образомъ рассмотримъ
 всеобщую формулу $a + cxx + cx^2$ и воз-
 мемъ за извѣстной случай, въ кото-
 ромъ оная формула квадратъ, $x=b$, такъ
 что $a + cbh + cb^2 = kk$; а для нахождения
 другихъ возмъ $x=b+y$ и тогда формула
 наша получитъ такой видъ:

а

$$cbb + 2chy + cy^2$$

$$eb^2 + 4eb^2y + 6eb^2yy + 4eb^2y^2 + ey^3$$

$$kk + (2cb + 4eb^2y + c + 6ebb)yy + 4eb^2y^2 + ey^3$$

гдѣ первой членъ есть квадратъ, косто
корень положи $k + py + qyy$ такъ чпо на-
ша формула равна сему квадрату kk
 $+ 2kpy + 2kquy + 2pqy^2 + qqy^2$; теперь
опредѣлили p и q такъ, чпобъ второй и
четвертой членъ уничтожились, къ чему
вопервыхъ требуется, чпобъ $2cb + 4eb^2$
 $= 2kp$, или $p = \frac{cb + 2eb^2}{k}$, а потомъ

$$c + 6ebb = 2kq + pp, \text{ или } q = \frac{c + 6ebb - pp}{2k}$$

слѣдующіе же члены раздѣливъ на y^2 да-
ютъ сѣ уравненіе: $4eb + ey = 2pq + qqy$,

$$\text{откуда } y = \frac{4eb - 2pq}{qq - e}; \text{ на послѣдокъ } x = b$$

$+ y$, въ которомъ случаѣ квадратной корень
нашей формулы будетъ $k + py + qyy$ и сле-
ди сѣ возьмемъ за первоначальной извѣст-
ной случай, по найдемъ нѣб онаго пакъ
новой, и такимъ образомъ продолжая
можно сколько кщо пожелаемъ. 945.

945.

Для изъясненія сего пусть данная формула будетъ $1 - xx + x^2$, гдѣ $a = 1$, $c = -1$, $e = 1$, и извѣстной случай заразъ виденъ а именно, $x = 1$, такъ что $b = 1$ и $k = 1$; положи теперь $x = 1 + y$, а квадратной корень нашей формулы $1 + py + qu$, то будетъ сперва $p = 1$, а потомъ $q = 2$, откуда $y = 0$ и $x = 1$, которой уже случай извѣстенъ и слѣдов. новаго не найдено; но изъ другихъ основаній можно доказать, что сія формула квадратомъ не будетъ, кромѣ случаевъ $x = 0$ и $x = \pm 1$.

946.

Пусть будетъ еще сія формула дана $2 - 3xx + 2x^2$, гдѣ $a = 2$, $c = -3$ и $e = 2$. Извѣстной случай заразъ виденъ $x = 1$, и такъ пусть $b = 1$ будетъ $k = 1$; ежели же теперь положится $x = 1 + y$, а квадратной корень $1 + py + qu$, будетъ $p = 1$; $q = 4$ и получится $y = 0$, откуда пакъ ничего новаго не найдется.

Другой

Другой примеръ пусть будетъ сия формула $1 + 8xx + x^4$, гдѣ $a = 1$, $c = 8$ и $e = 1$; по маломъ разсмотрѣніи найдется случай $x = 2$, возмъ $b = 2$ будетъ $k = 7$; положивъ $x = 2 + y$, а корень $= 7 + py + qu$, должно быть $p = 7$, $q = \frac{27}{44}$; отсюда $y = -\frac{510}{2011}$ и $x = \frac{9011}{2011}$, гдѣ знакъ — опустить можно. Въ семъ примѣрѣ примѣчать надлежитъ, что когда послѣдней членъ самъ по себѣ квадратъ, то и въ новой формулѣ квадратамъ осматривая, и корень можно также еще взять по прежнему третьему случаю.

По сему пусть будетъ, какъ и прежде $x = 2 + y$, то получимъ

г
 $32 + 32y + 8yy$
 $16 + 32y + 24yy + 8y^4 + y^4$

 $49 + 64y + 32yy + 8y^4 + y^4$, что разными способами квадратомъ быть можетъ; ибо положивъ сперва корень $= 7 + py + qu$ такъ, что наша формула равна будетъ сему квадрату $49 + 14py + 14qu + 2py^2 + y^4$; ⁺¹²²²
 и теперь можно зѣблать, что послѣдніе члены

члены пропадутъ , ежели положимся $2r = 8$, или $r = 4$, а остальные раздѣливъ на y даюшъ $64 + 32y = 14r + 14y + rry = 56 + 30y$; откуда $y = -4$, а $x = -2$, или $+2$, которой есть известной случай. Когда же r возьмется такъ , чтобъ вторые члены уничтожились , то будетъ $14r = 64$ и $r = \frac{32}{7}$; а оставшіеся члены раздѣливъ на yy даюшъ $14 + rr + 2ry = 32 + 8y$, или $\frac{1210}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$; отсюда $y = -\frac{71}{28}$, слѣдов. $x = -\frac{15}{14}$, или $+\frac{15}{14}$, которая величина дѣлаетъ формулу нашу квадратомъ , коего корень есть $\frac{1001}{284}$. Но $-yy$ есть также корень послѣдняго члена , то можно квадратной корень взять и такъ: $7 + ry - yy$. или формула равна сему квадрату $49 + 14ry - 14yy - 2ry^2 + y^4$, для включенія предпослѣдняго члена положи $8 = -2r$, или $r = -4$, а остальные члены раздѣливъ на y даюшъ $64 + 32y = 14r - 14y + rry = -56 + 2y$, откуда $y = -4$, какъ и прежде.

Если же вторые члены уничтожаются , то будетъ $64 = 14r$ и $r = \frac{32}{7}$ а остав-

оставшіеся раздѣливъ на $уу$ дають $32 + 8у = -14 + pp - 2ру$, или $32 + 8у = \frac{2рр}{у}$
 $= -\frac{64}{у}$, слѣдов. $у = -\frac{76}{16}$ и. $х = \frac{15}{16}$, тоже
 чпо и прежде.

947.

Такимъ же образомъ постулатъ
 можно со всеобщю формулою $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, когда случай $x = b$
 извѣстенъ , и оная будеть квадратъ
 п е. kk ; ибо тогда возми $x = b + y$, и
 получится формула въ столькихъ же чле-
 нахъ , изъ коихъ первой kk ; положи те-
 перь корень ся $k + py + qu$ и опредѣли
 p и q такъ , чтобъ вторыя и третья
 члены уничтожились , а остальные раз-
 дѣливъ на $у^2$ дадутъ простое уравненіе,
 откуда $у$ и слѣдов. $х$ опредѣлить можно.

Но здѣсь опмѣтаются только тѣ
 случаи , гдѣ новонайденное знаменованіе
 числа $х$ съ извѣстнымъ $x = b$ одинаково;
 ибо тогда ничего новаго найпи не лзя.
 Въ такихъ случаяхъ формула или сама
 по себѣ не возможна , или должно уга-
 дать

дать другой случай, гдѣ она будѣтъ
квадратъ

948.

Въ рѣшеніи квадратныхъ коренныхъ
знаковъ дошли мы до сего мѣста ;
только когда вышняя степень не
превышаетъ 4 той. Если же въ такой
формулѣ 5 тая, или еще большая сте-
пень случится, то употребляемыхъ по
сѣ мѣсто прѣмовъ не довольно дать ей
рѣшеніе, хотя бы уже одинъ случай и
былъ извѣстенъ; а что бы сѣ показать
яснѣе, то рассмотримъ теперь форму-
лу $kk + bx + cxx + dx^2 + ex^3 + fx^4$, гдѣ
первой членъ уже квадратъ, и когда бы
мы захотѣли положить корень какъ и
прежде $k + px + qxx$, а p и q опредѣлить
такъ, чтобы вторыя члены уничтожились,
то останутся еще 3, кои раздѣливъ на
 x^2 даютъ квадратное уравненіе, почему
должнобы было опредѣлить x новымъ
кореннымъ знакомъ. Если же бы по-
ложили корень $k + px + qxx + rx^3$, то
былабы уже въ квадратѣ 6 тая степень

и при

и три буквы p , q и r надлежало бы такъ опредѣлить число въ вторыхъ, третьихъ и четвертыхъ члены уничтожилась, то останутся еще 4 тая, 5 тая и 6 тая степень, которые раздѣливъ на x опять ведутъ къ квадратному уравненію, и слѣдов. x безъ кореннаго знака опредѣлить не можно; чего ради принуждены мы оставить такіе формулы, кои квадратами быть должны и приступимъ къ кубическимъ кореннымъ знакамъ,



ГЛАВА X.

О способѣ формулу

$\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ раздѣлить рациональною.

949.

Здѣсь требуются также величины вмѣсто x , чтобъ формула $a + bx + cxx + dx^3$ была кубическое число; и слѣдовательно можно бы было изъ одной извлечь кубической корень. При семъ упомянуть надлежитъ, что сія формула 3 тую степень

Тамъ II. III пень

пень превышать не должна; потому что въ противномъ случаѣ рѣшить ее не лзя бы было. Когда же формула до второй только степени возводитъ и членъ бы dx^2 уничтожился то бы рѣшеніе сіе не легче было; но ежели послѣдніе два члена уничтожатся, такъ чтобъ формулу $a+bx$ кубомъ одѣлать надлежало, то бы дѣло ни какой трудности не имѣло; ибо должно бы только положить $a+bx = p^2$, а оппуда заразъ найдется $x = \frac{p^2 - a}{b}$.

950.

Здѣсь опять прежде всего примѣчать надлежитъ, что ежели ни первой ни послѣдней членъ не кубы, то ни о какомъ рѣшеніи помышлять не лзя, когда случая не будетъ извѣстно, въ которомъ формула будетъ кубъ. Оной или самъ собою виденъ будетъ, или чрезъ пробу найдется.

Первое дѣлается, когда первой членъ кубъ и формула будетъ $f^3+bx+cx^2+dx^3$

$+dx^2$, гдѣ независимой случай $x=0$; потомъ также ежели послѣдней членъ кубъ и формула такого состоянія $a+bx+cx^2+dx^3$. Изъ сихъ обоихъ случаевъ рождается третей, гдѣ какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, которые три случая теперь мы рассмотримъ.

§ I.

Пусть предложенная формула будетъ $f^3+bx+cx^2+dx^3$, которую кубомъ дѣлать надлежитъ.

Положи корень ея $f+px$, такъ чтобъ наша формула была равна сему кубу $f^3+3ffpx+3fpx^2+p^3x^3$, гдѣ первые члены сами собою уничтожаются; определи p такъ чтобъ и въпоры исключить, что учинится когда $b=3ffp$, или $p=\frac{b}{3f}$; потомъ остальные члены раздѣливъ на xx дають сие уравненіе $c+dx=3fp+ p^3x$, откуда $x=\frac{c-3fp}{p^3-d}$, когда же бы послѣдняго члена dx^3 не было, то можно

бы просто положить кубичной корень $\equiv f$, и тогда бы нашлось $f^3 = f^2 + bx + cx$, или $b + cx = 0$, слѣдов. $x = -\frac{b}{c}$; но изъ сего далѣе ничего заключить нельзя.

952.

Предложенная формула пусть будетъ во вторыхъ имѣть такой видъ: $a + bx + cxx + g^3x^3$, кося кубичной корень возьми $p + gx$, котораго кубъ $p^3 + 3gp^2x + 3g^2p^2xx + g^3x^3$: понеже здѣсь послѣдніе члены уничтожаются, то опредѣли p такъ, чѣмъ и предпослѣдніе вонъ вышли, что здѣлается когда $c = 3gp^2$, или $p = \frac{c}{3g}$, а первые два дають сіе уравненіе: $a + bx = p^3 + 3gp^2x$, откуда $x = \frac{a - p^3}{3gp^2 - b}$. Еслибы перваго члена a не было, то можно бы кубичной корень просто взять $\equiv gx$, и тогда бы $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$, или $0 = b + cx$, слѣдов. $x = -\frac{b}{c}$; но сіе ни къ чему далѣе не служить.

953.

Пусть наконецъ данная формула будетъ $f^3 + bx + cxx + g^2x^2$, въ которой какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, чего ради оную по обоимъ предъидущимъ способамъ рѣшить можно, и слѣдов двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Сверхъ сего можно также еще положить корень $f + gx$, такъ что наша формула равна кубу $f^3 + 3ffgx + 3fggx + g^2x^2$, гдѣ первыя и послѣднія члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на x дають се уравненіе: $b + cx = 3ffg + 3fggx$, отсюда $x = \frac{b - 3ffg}{3fg - c}$.

954.

Когда же данная формула не будетъ надлежать ни до одного изъ сихъ 3 способовъ, то дѣлать больше нечего, какъ только отгадать величину, которая бы была кубъ, и если такая найдется на прим. $x = b$, такъ что $a + bb + chb + db^2 = k^3$, то возмъ $x = b + y$, и наша формула получитъ такой видъ.

III 3

я

а

$$bb+by$$

$$cbb+2cbu+cuu$$

$$db^2+3dbby+3dbyy+dy^2$$

$k^2+(b+2cb+3dbb)y+(c+3db)yy+dy^2$,
 которая надлежитъ до перваго способа,
 и слѣдов. величину для y найти можно;
 а опшуда получится новое знаменованіе
 вмѣсто x , изъ котораго послѣ такимъ
 же образомъ еще и больше найти можно.

955.

Сей способъ намѣрены мы изъ-
 яснить нѣкоторыми примѣрами и воз-
 мемъ во первыхъ сию формулу $1+x+xx$,
 которая должна быть кубъ, да припомъ
 и надлежитъ до перваго способа; по чему
 можно бы заразъ положивъ кубичной ко-
 рень $=1$, откуда найдется $x+xx=0$
 т. е. $x(1+x)=0$, слѣдов. или $x=0$, или
 $x=-1$, но изъ сего далѣе ни чего
 не слѣдуетъ. Сего ради возмъ кубичной
 корень $1+px$, коего кубъ есть $1+3px$
 $+3p^2xx$

$+ 3rrx + p^2x^2$, и положи $x = 3r$, или $p = \frac{2}{3}$,
и оставшіеся члены раздѣливъ на xx да-
ютъ $1 = 3rr + p^2x$, или $x = \frac{1-3rr}{p^2}$, но $p = \frac{2}{3}$,

найдемъ $x = \frac{1-\frac{8}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4} = 18$. И по сему фор-

мула наша $1 + 18 + 324 = 343$, изъ чего
кубичной корень $1 + rx = 7$. Если бы
захотѣли положить еще $x = 18 + y$,
то получила бы наша формула такой
видъ: $343 + 37r - 1 - y$, откуда по пер-
вому правилу кубичной корень надлежало
бы положить $7 + ry$, ксего кубъ 343
 $+ 147ry + 21rryy + p^2y^3$; положи $37 = 147r$,
или $p = \frac{2}{3}$, а остальные члены дадутъ
се уравненіе; $1 = 21rr + p^2y$, слѣдов. $y =$
 $\frac{1-21rr}{p^2}$ т. е. $y = \frac{-340.21.147}{37^2} = -\frac{1049540}{1369}$,
откуда еще новыя величины находить
можно.

956.

Пусть дана будетъ сія формула
 $2 + xx$, которая должна быть кубъ.
Здѣсь прежде всего надлежитъ опсгдаты

Ш 4

случай,

случай, въ которомъ сіе дѣлается, какой
 есть $x=5$; и такъ положи $x=5+y$ и
 получится $27+10y+yu$; изъ сего пусть
 будетъ кубичной корень $3+py$, и слѣдов.
 самая формула равна сему кубу, $27+27$
 $py+9p^2yu+p^3y^3$, возми $10=27p$, или
 $p=\frac{10}{27}$, и получится $1=9p^2y+p^3y^3$ от-
 куда $y=\frac{1-9p^2y}{p^3}$ т. е. $y=-\frac{10\cdot 9-37}{2009}$, или
 $y=-\frac{4617}{2009}$, а $x=\frac{357}{2009}$; по сему наша фор-
 мула $9+xx=\frac{214649}{170003}$ откуда кубичной ко-
 рень $3+py=\frac{139}{1009}$.

957.

Разсмотримъ еще сію формулу $1+x^3$,
 можетъ ли она быть кубомъ свѣрхъ
 двухъ очевидныхъ случаевъ $x=0$ и $x=-1$.
 Хотя сія формула и надлежитъ допре-
 тьяго случая, однакожъ корень $1+x$
 намъ ни чего не помогаетъ, пошому
 что сго кубъ $1+3x+3xx+x^3$ положиъ
 равнымъ нашей формулѣ дастъ $3x+3xx$
 $=0$, или $x(1+x)=0$, т. е. или $x=0$,
 или $x=-1$.

Естьли

Естьли же положимъ $x = -1 + y$, то получится сія формула $3y - 3yy + y^3$, которая должна быть кубъ, и надлежитъ до втораго случая. Положивъ кубичной корень $p + y$, коего кубъ $p^3 + 3pry + 3py^2 + y^3$, возмемъ $-3 = 3p$, или $p = -1$, то остальные члены дадутъ $3y = p^3 + 3pry = -1 + 3y$, слѣдов. $y = \frac{1}{2}$ т. е. безконечной, откуда слѣдовательно ни чего не найдется. Тщешной будетъ трудъ искать еще другія для x величины: ибо изъ другихъ основаній доказать можно, что формула $1 + x^2$ кромѣ упомянутыхъ случаевъ ни когда кубомъ не будетъ. Поныже показано, что сумма двухъ кубовъ какъ $1^3 + x^3$ никогда кубомъ быть не можетъ, по сему также не возможно когда $1 = 1$.

958.

Утверждаютъ также что $2 + x^2$ кубомъ быть не можетъ, исключая случай $x = -1$. Сія формула хотя и надлежитъ до втораго случая, но по показанному шамъ правилу вывести ничего не лзя,

Ц 5

потому

410 О НЕОПРЕДѢЛЕННОЙ

потому что среднихъ членовъ недоста-
етъ. Если же положимъ $x = -1 + y$,
то получится сія формула $1 + 3y - 3y^2$
 $+ y^3$, которую по всѣмъ тремъ случа-
ямъ рѣшить можно. Взявъ по первому
корень $1 + y$, коего кубъ $1 + 3y + 3y^2$
 $+ y^3$, будетъ $-3y^2 = 3y^2$, или $y = 0$, что
только дѣлается когда $y = 0$. Положи
по второму случаю корень $-1 + y$, коего
кубъ $-1 + 3y - 3y^2 + y^3$, и будетъ $1 + 3y$
 $= -1 + 3y$ и $y = \frac{2}{3}$ бесконечной. По тре-
тнему способу должно бы было взять ко-
рень $= 1 + y$, что уже прежде было.

959.

Пусть будетъ дана сія формула
 $3 + 3x^3$, которая должна быть кубъ.
Сіе учинится только въ случаѣ $x = -1$,
но отсюда ничего заключить не лзя;
потомъ также въ случаѣ $x = 2$, для что-
го положи $x = 2 + y$, и выдетъ сія фор-
мула $8 + 12y + 6y^2 + y^3$, или $27 + 36y$
 $+ 18y^2 + 3y^3$, которая надлежитъ до
перваго случая, и по сему возьми корень
 $= 3$

$= 3 + py$, коего кубъ $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$, положи $36 = 27p$; или $p = \frac{4}{3}$, а остальные члены раздѣливъ на y дадутъ $18 + 3y = 9pp + p^2y = 16 + \frac{64}{3}y$ или, $\frac{17}{3}y = -2$, откуда $y = -\frac{6}{17}$ слѣдов. $x = -\frac{30}{17}$; по чему формула наша $3 + 3x^2 = -\frac{936}{4913}$; коей кубичной корень есть $3 + py = \frac{21}{17}$; изъ сего знаменованія можно бы было еще болѣе найти, естли бы только захо- тѣли.

960.

Разсмотримъ еще наконецъ формулу $4 + xx$, которая въ двухъ извест- ныхъ случаяхъ будетъ кубъ; а именно когда $x = 2$ и $x = 11$, взявъ сперва $x = 2 + y$, формула сія $8 + 4y + y^2$ будетъ кубъ, коего корень пусть будетъ $2 + \frac{1}{3}y$, а кубъ $= 8 + 4y + \frac{2}{3}y + \frac{1}{27}y^3$, откуда $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$ слѣдов. $y = 9$, а $x = 11$, дру- гой известной случай. Положивъ по- томъ $x = 11 + y$ получится $125 + 22y + y^2 =$ кубу изъ $5 + py$ т. е. $125 + 75py + 15p^2y^2 + p^3y^3$; взявъ $p = \frac{22}{15}$ будетъ $1 = 15pp + p^2y$ или $p^2y = 1 - 15pp = -\frac{100}{27}$, откуда $y = -\frac{100}{27 \cdot \frac{484}{225}}$ слѣдов. $x = -\frac{5407}{10648}$. По-

Понеже x какъ положительной такъ и отрицательной быть можеть, то возмемъ $x = \frac{2+2y}{1-y}$, формула наша будетъ $\frac{8+8y}{(1-y)^3}$, которая должна быть кубъ помножь въ вверху и въ низу на $1-y$, чиселъ значеніе было кубъ, и получится $\frac{8-8y+8y-8y^3}{(1-y)^3}$, гдѣ числителя только $8-8y+8y-8y^3$, или раздѣливъ на 8 т. е. $1-y+y-y^3$ кубомъ здѣлашь должно которая формула до всѣхъ трехъ способовъ принадлежаща. Положи по первому корень $= 1-\frac{1}{2}y$, коего кубъ $1-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{8}y^3$. будетъ $1-y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y$, или $27-27y=9-y$, откуда $y=\frac{8}{13}$, слѣдов. $x+\frac{1}{2}y=\frac{11}{13}$ и $1-y=\frac{5}{13}$, слѣдов. $x=11$ какъ и прежде; по второму способу положивъ корень $\frac{1}{2}-y$ тоже самое найдется.

По третьему взявъ, корень $1-y$, коего кубъ $1-3y+3y^2-y^3$, получится $-1+y=-3+3y$, откуда $y=1$, слѣдов. $x=\frac{1}{2}$ бесконечной, и такъ и

по сему способу ничего новаго не най-
дётся.

961.

Зная уже сіи два случая $x=2$ и $x=1+y$ мо-
жно положить $x = \frac{2+1y}{1+y}$, и когда $y=0$,
будетъ $x=2$; но если y безконечной, то
 $x=1+y$; и по сему пусть во первыхъ
 $x = \frac{2+1y}{1+y}$ будетъ наша формула $4+$
 $\frac{4+44y+121y^2}{1+2y+y^2}$, или $\frac{8+52y+125y^2}{(1+y)^2}$; по-
множь въ верху и въ низу на $1+y$, чтобъ
заменатель былъ кубъ, а адълатъ бы
только числителя, которой будетъ $8+60y$
 $+177y^2+125y^3$, кубомъ.

И такъ положивъ корень $=2+5y$,
чрезъ что не только 2 первые члена,
но и послѣдніе уничтожаются, и слѣдов.
ничего не найдётся.

Положи по второму способу корень
 $=p+5y$, коего кубъ $p^3+15py^2+75py^2$
 $+125y^3$

$+125y^2$, и возмем $177=75p$, или $p=\frac{59}{3}$,
будемъ $8+60y=p^2+151py$, откуда $-\frac{29+1}{19y}$
 $y=\frac{80579}{15621}$ и $y=\frac{80579}{3072752}$ и отсюда можно бы
было найти x .

Если бы мы положили корень по 3 му
способу $2+\frac{1}{2}y$, то бы отсюда ничего
не вышло; но можно также положить
 $x=\frac{2+11y}{1-y}$, и тогда будемъ наша форму-

$$\text{ла } 4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$$

каей числителя помноживъ на $1-y$ вы-
демъ. $8+28y+89yy-125y^2$.

Если теперь положимъ по первому спо-
собу корень $=2+\frac{1}{2}y$, коего кубъ $8+28$
 $y+\frac{9}{4}yy+\frac{143}{27}y^3$, то будемъ $89-125y=\frac{9}{4}$
 $+\frac{143}{27}y$, или $\frac{2718}{27}y=\frac{169}{3}$ слѣдов. $y=\frac{1328}{3918}=\frac{9}{26}$, по-
чему $x=11$, что уже извѣстно.

Возмемъ еще по третьему способу ко-
рень $2+5y$, коего кубъ $8-60y+150yy$
 $-125y^3$, откуда найдемъ $28+89y=-60$
 $+150y$ слѣдов. $y=\frac{11}{26}$, а отсюда $x=-\frac{1390}{27}$
по чему формула наша будемъ $\frac{119104}{729}$,
кубъ числа $\frac{106}{9}$.

962.

Сии по сущь извѣстные способы, помощію капторыхъ формулу, или квадратомъ или кубомъ издѣлать можно, когда только во первомъ случаѣ вышшая степень не опредѣленнаго числа не превышаетъ второй, а въ послѣднемъ третьей степени.

Можно бы еще случай присоединить, когда предложенную формулу биквадратомъ издѣлать надлежитъ, въ которомъ вышшая степень второй не превышаетъ; такъ когда формула $a+bx+cx^2$ должна быть биквадратъ, то прежде всего надлежитъ оную издѣлать квадратомъ, а потомъ корень сего квадрата еще квадратомъ; о чемъ уже правила показаны.

Такъ когда наприм. $xx+7$, должно быть биквадратъ, то издѣлай прежде сию формулу квадратомъ, что учинишия поло-

живъ $x = \frac{7rp - qq}{2rq}$, или $x = \frac{qq - 7rp}{2rq}$, и

формула наша равна сему квадрату q^2

$$\frac{q^4 - 14q^2rp + 49r^4}{4rrq} + 7 = \frac{q^4 + 14q^2rp + 49r^4}{4rrq},$$

откуда корень $\frac{7rr + qq}{2rq}$, которой еще

квадратомъ адѣлать должно. На сей ко-
нцу помножь вѣверху и вѣнизу на $2rq$,
чтобъ значеніе было квадратъ; а
числитель $2rq(7rr + qq)$ долженъ быть
также квадратъ, чего иначе учинить не
льзя, какъ отгадывать только случай: сего
ради можно взять $q = rz$. чтобъ сія
формула $2frz(7r^2 + r^2z^2) = 2r^4z(7 + zz)$, и
раздѣливъ на r^4 , т. е. $2z(7 + zz)$ была ква-
дратъ; адѣсь извѣстной случай $z = 1$; и
такъ положивъ $z = 1 + y$ получивъ $(2 +$
 $2y)(8 + 2y + yy) = 16 + 20y + 6yy + 2y^2$, отпу-
да корень пусть будетъ $4 + \frac{5}{2}y$, кото-
раго квадратъ $16 + 20y + \frac{25}{4}yy$ положивъ
равнымъ формулѣ нашей получимъ $6 + 2y$
 $= \frac{25}{4}$, $y = \frac{5}{4}$ и $z = \frac{9}{4}$, но $z = \frac{q}{r}$ будетъ
 $q = 9$ и $r = 8$ по сему $x = \frac{357}{144}$, слѣдов-
формула наша $7 + xx = \frac{279711}{10752}$, коей ква-
дратной корень есть $\frac{529}{144}$, а сего еще ква-
дратной корень есть $\frac{23}{12}$, котораго на-
ша Формула биквадратъ.

о которой матеріи намѣрены мы говорить
пространствѣ въ слѣдующей главѣ.



ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи на множителей формул

$$axx + bxy + cy.$$

964.

Здѣсь буквы x и y значатъ цѣлыя толь-
ко числа: мы уже видѣли въ какихъ
случаяхъ дробями довольствоваться дол-
жно, и какимъ образомъ приводится во-
просъ въ цѣлыя числа. Когда наприм.
искомое число x будетъ дробь, то на-
длежитъ только взять $x = \frac{1}{u}$ и тогда
вмѣсто z и u всегда можно брать
цѣлыя числа; и понеже сія дробь въ
самомъ меньшемъ видѣ изъяслена быть
можетъ, то объ буквы z и u за такія
числа почесть можно, кои общаго дѣ-
лителя не имѣютъ.

Въ предложенной формулѣ x и y
значатъ цѣлыя только числа, и прежде
нельзя

Нежели можемъ мы показать, какимъ образомъ оную квадратомъ, или кубомъ, или другою вышшею степенью издѣлать можно, надлежитъ напередъ разсмотрѣть какія знаменованія буквѣмъ x и y даны должно, чшобъ формула содержала въ себѣ два или больше множителей.

§65:

Здѣсь 3 случая входятъ въ разсужденіе: *першій* когда сія формула дѣйствительна на 2 раціональные множителя разрѣшится можетъ; что учинится, какъ уже мы и прежде видѣли, когда $bb - 4ac$ будетъ квадратное число:

Другой случай когда оба сія множителя равны между собою, въ которомъ сама формула дѣйствительной квадратъ содержитъ:

Третьей случай когда формула не иначе какъ на ирраціональные множители раздроблена быть можетъ, хотя они или просто ирраціональные, или совсемъ не-

В 2

воз-

возможные будущѣ. Первое учинится , когда $bb - 4ac$ есть положительное число, но не квадратъ ; а послѣднее , ежели $bb - 4ac$ будетъ отрицательное : сн по сущъ 3 случая , кои мы разсмотрѣвъ имѣемъ.

966.

Ежели формула наша на два рациональные множителя разрѣшится , то можно ее представить такъ : $(fx + gy)(bx + ky)$, которая уже по своему свойству заключаетъ въ себѣ двухъ множителей. А когда за благо разсудится, чѣмъ она большее число множителей въ себѣ заключала , то возьми только $fx + gy = pq$ и $bx + ky = rs$, и тогда наша формула равна сему произведенію $pqr s$, слѣдов. 4 множителей въ себѣ содержишь , кои хъ число по произволению увеличить можно , а изъ сего получаемъ мы двоякое знаменованіе вѣсто x , а именно:

$$x = \frac{pq - gy}{f} \text{ и } x = \frac{rs - ky}{b}, \text{ почему будетъ}$$

$$bprq - bgy = frs - fky, \text{ слѣдов. } y = \frac{frs - bprq}{fk - bg}$$

и

и $x = \frac{kpq - grs}{fk - bg}$. Для изъясненія буквъ x и y , въ цѣлыхъ числахъ надлежитъ взять p, q, r и s такъ, чтобъ числитель дѣйствительно могъ раздѣлиться на знаменателя, что учинится ежели или p и r , или q и s на него раздѣлятся.

967.

Для изъясненія сего, пусть предложена будетъ формула $xx - yy$, которая состоитъ изъ сихъ множителей $(x+y)(x-y)$, а ежели она еще больше множителей имѣть долженствуетъ, то положи $x+y=pq$; $x-y=rs$ и получишь $x = \frac{pq+rs}{2}$, $y = \frac{pq-rs}{2}$; но что бы сіи числа были цѣлыя, то должны оба числа pq и rs быть вдругъ или чѣтные, или оба нечѣтные.

Пусть наприм. $p=7$, $q=5$, $r=3$ и $s=1$, будетъ $pq=35$ и $rs=3$, слѣд. $x=19$ и $y=16$, откуда найдется $xx-yy=105$, которое число дѣйствительно
в 3
состо-

состоитъ изъ множителей 7, 5, 3, 1. и такъ сей случай не имѣетъ ни малѣйшаго затрудненія.

§ 68.

Еще меньше трудности имѣетъ другой случай, гдѣ формула два равныя множителя въ себѣ заключаетъ, и по сему такъ представляема быть можетъ: $(fx + gy)^2$, которой квадратъ никакихъ другихъ множителей имѣть не можетъ, кромѣ тѣхъ, кои изъ его корня $fx + gy$ рождаются. И такъ положивъ $fx + gy = pqr$, будетъ формула наша $ppqqrr$, и слѣдов. столько множителей имѣть можетъ, сколько за благо разсудится.

Здѣсь изъ двухъ чиселъ x и y одно только опредѣляется, а другое оставляется на наше произволіе; и когда получится $x = \frac{pqr - gy}{f}$, гдѣ x легко можно взять такъ, что дробь уничтожится. Наилегчайшая сего роду формула есть xx , если возмется $x = pqr$, то квадратъ xx заключаетъ въ себѣ три
квад-

квадратные множители, а именно: pp , qq и rr .

969.

Гораздо больше имѣетъ трудности третей случай, гдѣ формула наша на 2 рациональныя множителя разсѣвшись не можетъ, и требуется къ сему особенное искусство находить вмѣсто x и y такія знаменованія, изъ которыхъ бы формула 2, или болѣе множителей въ себѣ содержала. А что бы облегчить сіе разысканіе, то должно примѣчать, что наша формула легко перемѣнится местомъ въ другую, гдѣ средняго члена нѣтъ; а именно надлежитъ только взять $z =$

$\frac{a-z}{2}$, и получится сія формула $\frac{ax - by + bz}{4}$

$+ \frac{byz - bby}{24} + cyy = \frac{ax + (4ac - bb)yy}{4}$;

опустимъ теперь средней членъ и рассмотримъ формулу $axx + cyy$, гдѣ все дѣло въ томъ состоятъ, какія бы знаменованія буквамъ x и y даны должно, что бы сія формула множителей имѣла. Легко усмотрѣвъ можно, что сіе отъ

Д 4

свой-

свойства чиселъ a и c зависящѣ, и для того начнемъ съ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ сего рода формулъ,

970.

Пусть во первыхъ дана будетъ формула $xx+yy$, которая всѣ числа въ себѣ содержитъ, кои сумму двухъ квадратовъ изъвѣляютъ, и представимъ здѣсь самыя меньшія до 50.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. между которыми находятся нѣкоторыя первыя числа, кои ни какихъ множителей не имѣютъ; по сему вопросъ будетъ яснѣе, какія знаменованія буквамъ x и y дать должно, чтобъ формула $xx+yy$ дѣлителей или множителей въ себѣ имѣла; да припомъ столько, сколько за благо разсудится. При чемъ прежде всего исключаемъ мы нѣ случаи, гдѣ x и y общаго дѣлителя имѣютъ, потому что тогда $xx+yy$ на онаго дѣлителя и на квадратъ его могло бы раздѣлиться; ибо когда напримъ

$$x=7p$$

$x=7p$ и $y=7q$, то сумма ихъ квадратовъ $=49pp+49qq=49(pp+qq)$ можетъ на 49 раздѣлиться; и такъ надлежитъ вопросъ до такихъ формулъ, гдѣ x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, или между собою недѣлимы. Затрудненіе здѣсь заразъ нападаетъ; ибо хотя и видно что оба числа x и y нечетныя, однакожъ формула $xx+yy$ четное число будетъ и слѣд. на 2 дѣлимо; но если одно четное, а другое нечетное, то формула будетъ нечетъ: а имѣетъ ли она дѣлителей или нѣтъ, то не скоро узнать можно. Оба же числа x и y четныя быть не могутъ, потому что они не должны имѣть общаго дѣлителя.

971.*

По сему пусть будутъ оба числа x и y между собою недѣлимыя, и хотя формула $xx+yy$ должна въ себѣ заключать 2 или больше множителей, однакожъ въ такомъ случаѣ прежній способъ имѣть мѣста не можетъ; потому что сія

Ѣ 5

формула

формула на 2 рациональные множителя разрѣшиться не можетъ. Но ирраціональные множители, на которые формула раздробляется, и извѣщаясь чрезъ произведение $(x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1})$, могутъ намъ еще показать услугу; ибо когда формула $xx + yy$ дѣлится вѣрно на множители имѣетъ, то сии ирраціональные множители должны паки имѣть множителей. Когда же бы сии множители дѣлителей далѣе не имѣли, то бы и произведение оныхъ также на какихъ множителяхъ не имѣло. Но когда сии множители суть ирраціональные, да и совсемъ невозможны, то числа x и y равнымъ образомъ общаго дѣлителя имѣть не должны, и слѣдов. не могутъ они имѣть ни какихъ рациональныхъ множителей, а будутъ ирраціональными, или совсемъ невозможными.

972.

И такъ когда требуется, чтобъ формула $xx + yy$ состояла изъ двухъ рациональныхъ множителей, то оба ирраці-

раціональные множители раздробя пакъ на два множителя и положи во первыхъ $x+yV-1=(p+qV-1)(r+sV-1)$; а понеже $V-1$, какъ положительной такъ и отрицательной взять можно, то само собою будетъ $x-yV-1=(p-qV-1)(r-sV-1)$, и произведение оплуда дастъ нашу формулу, т. е. $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ такъ что она два раціональные множителя имѣетъ, т. е. $pp+qq$ и $rr+ss$. Но здѣсь осталось еще опредѣлить значенія чиселъ x и y , которыхъ также раціональные быть должны.

Помноживъ неизвлескомыхъ множителей между собою выдѣлѣмъ $x+yV-1=pr+qs+psV-1+qrV-1$ и $x-yV-1=pr-qs-qrV-1-psV-1$, сложивъ эти формулы, будетъ $x=pr-qs$; когда же вычлѣмъ одну изъ другой, то получится $2yV-1=2psV-1+2qrV-1$, или $y=ps+qr$. По сему взявъ $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$ формула наша $xx+yy$ замѣстительно имѣетъ будетъ двухъ множителей и выдѣлѣмъ $xx+yy=(pr+qs)(rr+ss)$.

Но

Но если потребуются большее число множителей, то должно только взять p и q такъ чинобъ $pp+qq$ имѣло двухъ множителей, и тогда бы нашлось 3 множителя, коихъ число по произведению увеличить можно.

973.

Понеже здѣсь квадраты только чиселъ p, q, r и s входящъ, то можно сіи взять также и отрицательными: возми наприим. q отрицательное, будетъ $x = pr + qs$ и $y = ps - qr$, коихъ сумма квадратовъ та же самая, какъ и прежде. Отсюда усматриваемъ мы, что если число произведенію $(pp + qq)(rr + ss)$ равно, то оно двоякимъ образомъ на два квадрата раздроблено быть можетъ; ибо сперва найдено $x = pr - qs$ и $y = ps + qr$; а потомъ $x = pr + qs$ и $y = ps - qr$. Пусть наприим. $p = 2$, $q = 3$, $r = 2$ и $s = 1$, такъ что бы сіе произведеніе вышло 13. $5 = 65 - xx + yy$, то будетъ тогда или $x = 4$, а $y = 7$, или $x = 8$ а $y = 1$, и въ обо-

ихъ случаяхъ $xx+yy=65$. Когда много такихъ чиселъ помножишь между собою, то произведение еще больше развѣ будетъ извѣлять сумму двухъ квадратныхъ чиселъ различными образами. Умножь наприм. $2^2+1^2=5$; $3^2+2^2=13$ и $4^2+1^2=17$ между собою, и выдѣтъ 1105, которое число на два квадрата раздроблено будетъ слѣдующимъ образомъ:

I) 33^2+4^2 ; II) 32^2+9^2 ; III) 31^2+12^2 ; IV) 24^2+23^2 .

974.

Между содержащимися въ формулѣ $xx+yy$ числами находятся такія, кои изъ двухъ или больше такихъ чиселъ по умноженію составлены, а потомъ и такіе кои такъ не составлены. Сии называть станемъ простыми числами, а дѣи сложными: и такъ простые числа въ формулѣ $xx+yy$ будутъ слѣдующія: 1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, и проч. въ которомъ ряду двоякія числа попадаются, а именно: первыя числа, или такія кои дѣлились не имѣютъ какъ 2,

5,

5, 13, 17, 29, 37, 41; которыхъ всѣ кромѣ
 5 такого состоянія, что опята опъ
 нихъ 12у, остатокъ на 4 раздѣлится;
 или они содержатся въ формулѣ $4n+1$.
 Потомъ попадаютъ квадратныя числа,
 яко 9, 49, коихъ корни 3 и 7 не находящся.
 При чемъ примѣчать надлежитъ, что
 сѣи корни 3 и 7 въ формулѣ $4n-1$ со-
 держатся: но очевидно, что ни одно
 число изъ сей формулы $4n-1$ не мо-
 жетъ быть суммою двухъ квадратовъ:
 ибо когда сѣи числа нечетныя, то дол-
 жно одному изъ обоихъ квадратовъ быть
 четному, а другому нечетному. Но
 мы видѣли, что всѣ четныя квадраты
 на 4 дѣлятся, а нечетныя въ формулѣ
 $4n+1$ содержатся; и такъ ежели чет-
 ной квадратъ съ нечетнымъ сложится,
 то сумма получитъ всегда формулу
 $4n+1$, а никогда $4n-1$. что же всѣ
 первыя числа формулы $4n+1$ суть сум-
 мы двухъ квадратовъ, то хотя и извѣст-
 но, но доказать не столь легко можно;

575.

Послупимъ далѣе и рассмотримъ формулу $xx + 2уу$, дабы увидѣть, какія означенія x и y имѣть должны, чтобы найти ея множители. Понеже сія формула въ мнимыхъ множителяхъ представляется такъ $(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})$, то разумѣется, какъ и прежде, если формула наша имѣетъ множителей, то и сія мнимая формула должна имѣть своихъ. Для того положи во первыхъ $x + y\sqrt{-2} = (p + q\sqrt{-2})(r + s\sqrt{-2})$, то видно, что $x - y\sqrt{-2} = (p - q\sqrt{-2})(r - s\sqrt{-2})$; по чему наша формула будетъ $xx + 2уу = (pp + 2qq)(rr + ss)$, и слѣдовательно двухъ множителей имѣетъ, нѣ въ коихъ припомъ каждой того же роду. Для учиненія сего надлежитъ опредѣлить надлежащіе означенія вмѣсто x и y , что здѣлается слѣдующимъ образомъ: понеже $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$, а $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, то сумма дастъ $2x = 2pr - 4qs$, слѣдов. $x = pr - 2qs$, а разность $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$

$+2rsV-2$, откуда $y=qr+rs$. И такъ когда наша формула $xx+2yy$ должна имѣть множителей, то оныя бываютъ всегда такого свойства, что одинъ изъ нихъ $pp+2qq$; а другой $rr+2ss$, или они оба суть числа одного рода съ $xx+2yy$. Для сей причины можно x и y двоякимъ образомъ опредѣлить, попомощи q какъ положительное, такъ и отрицательное взять можно, и найдется $x=pr-2qs$ и $y=ps+qr$; а потомъ $x=pr+2qs$ и $y=ps-qr$.

976.

Ся формула $xx+2yy$ заключаетъ въ себѣ всѣ пѣ числа, которыя изъ одинаковаго и удвоеннаго квадрата состоятъ, и кои мы здѣсь до 50 предлагаемъ:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 38, 41, 43, 44, 49, 50. и которыя какъ и прежде, на простыя и составныя раздѣлить можно; простыя, кои изъ предъидущихъ не составлены суть слѣдующія: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41,

43,

43, 49, между которыми всѣ ; кромѣ квадратовъ 25 и 49 суть первыя числа; а которыхъ здѣсь нѣтъ, оныхъ попадаются квадраты. Здѣсь надлежитъ также примѣчать, что всѣ первыя числа содержащіяся въ нашей формулѣ, заключающіяся или въ сей $8n+1$, или въ сей $8n+3$; напротивъ того остальные, кои или въ формулѣ $8n+5$, или въ сей $8n+7$ еодержатся, никогда изъ одинакаго и удвоеннаго квадрата состоять не могутъ. Но и то извѣстно, что всѣ первыя числа заключающіяся въ одной изъ первыхъ двухъ формулъ $8n+1$ и $8n+3$ могутъ всегда на одинакой и двойной квадратъ разрѣшиться.

977.

равнымъ образомъ приступимъ къ общей формулѣ и рассмотримъ, какія значенія числамъ x и y дать надлежитъ, чтобъ формула сія множилей имѣла. Понеже оную чрезъ слѣдующее произведение представить можно $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то изобрази ка-

Тамъ II. ы ждаго

ждаго изъ сихъ множителей въ двухъ множителяхъ равнаго свойства ; а именно: возьми $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$ и $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$ и будешь наша формула $xx+суу=(pp+сqq)(rr+сss)$, откуда явствуетъ, что множители съ самою формулою будутъ наки того же роду ; а знаменованія чиселъ x и y получатся слѣдующимъ образомъ : $x=pr+сqs$, или $x=pr-сqs$; $y=qr+ps$, или $y=ps-qr$; и отсюда легко уже узнать можно, какимъ образомъ формула наша еще большее число множителей имѣть можешь,

978.

Теперь не трудно раздробить и сію формулу $xx-суу$ на множители ; потому что только $-с$ на мѣсто $+с$ сдѣлать должно ; между тѣмъ можно ихъ также найти непосредственно такимъ образомъ : когда наша формула равна сему произведенію $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то возьми , какъ слѣдуетъ $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$ и $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$
оп-

близко найдутся сѣи множители : $xx - cy = (pr - cqs)(tr - css)$, кои также сѣи нашою формулою одного роду ; знаменованіе же чиселъ x и y можно опредѣлить двоякимъ образомъ :

$x = pr + cqs$, $y = qr + ps$; попомъ $x = pr - cqs$ и $y = ps - qr$; но ежели пожелаешь извѣдать выдѣль ли такимъ образомъ найденное произведеніе ; то зѣбляи пробу сѣи первыми знаменованіями и будетъ $x^2 = prrr + 2cqrps + ccqqss$, $yy = prss + 2pqrs + qqrr$, и $cy = cprps + 2cqrps + cqqr$, откуда получится $xx - cy = prrr - cprps + ccqqss - cqqr$, что сѣи найденнымъ произведеніемъ $(pr - cqs)(tr - css)$ согласуетъ.

979.

По сѣи мѣсто разсматривали мы одинъ только первой членъ : а теперъ помножимъ оной буквою a , и спашемъ искать какихъ формула $axx + cy$ множителей имѣть можеть.

bl 2

Зѣбь

Здѣсь видно , что наша формула равна будещь сему произведенію $(xVa+yV-c)(xVa-yV-c)$, которые оба множила еще въ множителяхъ изъавить должно ; но при семъ бываетъ нѣкоторое затрудненіе : ибо если бы слѣдуя прежнему способу положили

$xVa+yV-c=(pVa+qV-c)(rVa+sV-c)=pr-cqs+psV-ac+qrV-ac$, и $xVa-yV-c=(pVa-qV-c)(rVa-sV-c)=apr-cqs-psV-ac-qrV-ac$, то получили бы отсюда $2xVa=2apr-2cqs$, а $2yV-c=2psV-ac+2qrV-ac$, и слѣдовъ какъ для x , такъ и для y нашли бы ирраціональныя знаменованія , кои здѣсь имѣть мѣста не могутъ.

980.

Сему затрудненію можно пособить слѣдующимъ образомъ , положивъ $xVa+yV-c=(pVa+qV-c)(r+sV-ac)=prVa-cqsVa+qrV-c+apsV-c$, $xVa-yV-c=(pVa-qV-c)(r-sV-ac)=prVa-cqsVa-qrV-c$

$-c - apr \sqrt{-c}$; откуда вмѣсто x и y слѣдующія рациональныя знаменованія найдутся : $x = pr - cqs$, $y = qr + aprs$. потомъ получивъ формула наша слѣдующихъ множителей $axx + cyy = (apq + cqq)(rr + acss)$, изъ которыхъ одинъ только такой же съ наисю формулою видъ имѣетъ , а другой совсемъ иной.

981.

Между тѣмъ однакожъ обѣ сии формулы великое сходство имѣютъ; ибо всѣ числа содержащіяся въ первой будучи помножены на числа другой обращаются паки въ первую формулу. Мы уже видѣли, что 2 числа второй формулы $xx + acyy$ кои съ числами первой $xx + cyy$ согласуютъ; будучи же между собою помножены производятъ паки число второй формулы.

И такъ надлежитъ еще разыскать, когда два числа первой формулы $axx + cyy$ между собою помножатся , по кѣ которой формулѣ надлежитъ произведение. Чего ради помноживъ формулы перваго

Ы 3 рода

рода $(arr + cqq)(arr + css)$, легко усмотрѣть можно, что произведение предсказанное можно такъ: $(arr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$; взявъ $arr + cqs = x$ и $ps - qr = y$ получимъ формулу $xx + acyy$, которая до послѣдняго рода надлежитъ. По сему два числа перваго рода $axx + cyy$ помноживъ между собою даютъ число втораго рода. Сие вкратцѣ изъяснить можно такъ: числа перваго рода означать I; втораго II. слѣдов I, I. даютъ II; I, II даютъ I; II, II даютъ II; откуда такожде явствуетъ, когда много такнхъ чиселъ одно надругое множить, должно, какъ I I. I даютъ I; I. I. II даютъ II; I, II, II даютъ I; II. II. II, даютъ II.

982.

Для изъясненія сего пусть будемъ $a = 2$ и $c = 3$, откуда сии два рода чиселъ рождаются; первой содержится въ формулѣ $2xx + 3yy$, а другой въ формулѣ $xx + 6yy$, числа же перваго рода до 50 суть слѣдующія.

I,

I. 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. До втораго рода принадлежатъ сн :

II. 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49. Помножимъ число перваго рода наприм. 35 на одно втораго роду наприм. 31, произведение будетъ 1085, которое число заповдлинно въ формулѣ $2xx + 3yy$ содержится, или можно вмѣсто y такое найпи число, чтобъ $1085 - 3yy$ было удвоенной квадратъ, т. е. $2xx$; сие учинится, I) когда $y = 3$: ибо тогда $x = 23$, попомъ также II) ежели $y = 11$, будетъ $x = 19$; III) когда $y = 13$, то $x = 17$, и наконецъ IV) ежели $y = 19$, будетъ $x = 1$. Сн оба рода чиселъ можно ояпль раздробить на простыя и составныя. Составныя суть пѣ, кои изъ двухъ, или больше, меньшихъ чиселъ одного, или другаго рода состоятъ. Такимъ образомъ перваго рода простыя числа будутъ слѣдующія :

2, 3, 5, 11, 29, а составныя сн 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50 и проч

Второго же рода простые числа суть
 сн 1, 7, 31; прочиежъ всѣ сославныя ,
 яко 4, 6, 9, 10; 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33,
 36, 40, 42, 49.

ГЛАВА XII.

О превращеніи формулы $axx+cy$ въ
 квадраты , или въ вышшія степени.

983.

Мы уже прежде видѣли , что чиселъ
 формулы $axx+cy$ иногда квадратами
 здѣлать не лзя ; но какъ скоро сіе воз-
 можно будетъ , то помянутую формулу
 въ другую превративъ можно , въ кото-
 рой $a=1$, какъ наприм. сія формула
 $2rp-qq$ будетъ квадратъ , и можно ея
 представить въ семъ видѣ : $(2p+q)^2-2$
 $(p+q)^2$; взявъ теперь $2p+q=x$ и $p+q=y$
 получится формула $xx-2yy$, гдѣ $a=1$
 и $c=-2$. Подобное превращеніе завсегда
 имѣетъ мѣсто , сколь часто такую
 формулу квадратомъ здѣлать можно , и
 по

по сему когда формулу $axx+cyu$ квадратомъ, или другою вышшею чепною степенью здѣлать надлежитъ; то мы заподлинно положить можемъ $a=1$; а прочіе случаи почтемъ за не возможные.

984

Пусть предложена буденъ формула $ax+cy$, которую квадратомъ здѣлать должно. Понеже она состоитъ изъ сихъ множителей $(x+yV-c)(x-yV-c)$, то должны оныя быть или квадраты, или помноженные на одно число квадраты; ибо когда произведение двухъ чиселъ должно быть квадратъ наприим. pq , то требуется чпобъ или $p=rr$, а $q=ss$ т. е. чпобъ каждой множитель былъ квадратъ, или чпобъ $p=mr$, а $q=mss$, т. е. чпобъ множители были квадраты на одно число помноженные. Чего ради положи $x+yV-c=m(p+qV-c)^2$, и будетъ само по себѣ $x-yV-c=m(p-qV-c)^2$, откуда получаемъ $xx+cyu=mm(pp+qq)$ и слѣд. квадратное число. А для опредѣленія

ы 5

буквъ

буквъ x и y имѣемъ мы сія уравненія:
 $x + y\sqrt{-c} = m\sqrt{r} + 2mrq\sqrt{-c} - mcqq$ и $x - y\sqrt{-c} = m\sqrt{r} - 2mrq\sqrt{-c} - mcqq$, гдѣ какъ
 видно x равенъ будетъ раціональной час-
 ти, а $y\sqrt{-c}$ ирраціональной, ш. е.
 $x = m\sqrt{r} - mcqq$ и $y\sqrt{-c} = 2mrq\sqrt{-c}$, или
 $y = 2mrq$.

И по сему положивъ $x = m\sqrt{r} - mcqq$, а
 $y = 2mrq$, формула наша $xx + cyu$ будетъ
 квадратъ; а именно $m^2(rr + cqq)^2$, когдѣ
 корень есшь $m\sqrt{r} + mcqq$.

285.

Когда два числа x и y одно на
 другое надѣлимо, или общаго дѣлителя
 не имѣютъ, то надлежитъ положить
 $m = 1$, какъ ежели $xx + cyu$ должно
 быть квадратъ, то возми только $a = rr$
 $- cqq$ а $y = 2rq$, и тогда сія формула ра-
 вна будетъ квадрату $rr + cqq$. вспомо-
 жно, чтобъ брать $x = rr - cqq$, можно
 также положить $x = cqq - rr$, потому что
 въ обоихъ случаяхъ квадратъ xx одина-
 ковъ. Сія сушь тѣ же самыя формулы,
 кои

кон мы совсемъ изъ другихъ нашли
основаній , чѣмъ исправность сего спо-
соба подтверждается. Ибо по прежнему
способу , когда $xx + cy$ долженствуешь

быть квадратъ, положи корень $= x + \frac{py}{q}$

и получится $xx + cy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{p^2y^2}{q^2}$,

гдѣ xx уничтожается , а остальные чле-
ны раздѣливъ на y и помноживъ на qq
даютъ $cqq = 2pqx + p^2y$, или $cqq - p^2y$
 $= 2pqx$, раздѣливъ теперь на $2pq$ и на y

будетъ $\frac{x}{y} = \frac{cqq - p^2y}{2pq}$. Поѣже x и y дол-

жны быть недѣлимые числа такъ какъ p
и q по долженъ x числителью , а y зна-
менателю быть равенъ , слѣдов. $x = cqq$
 $- p^2$ а $y = 2pq$ какъ и прежде.

986.

Сие рѣшеніе тоже самое будетъ
хотя бы число c было положительное
или отрицательное; но ежели оно само
имѣетъ множителей такъ какъ предло-
женная

женная формула $xx + asu$, которая должна быть квадратъ ; по прежнее рѣшеніе не только имѣетъ мѣсто , гдѣ $x = acq - pru$ а $y = 2rq$, но еще и сіе $x = cqq - apr$ и $y = 2rq$: ибо тогда равнымъ образомъ будетъ $xx + asu = cqq + 2acr + apr = (c + a)^2$, что также учинится, когда возмемъ $x = apr - cqq$, потому что квадратъ x выйдетъ одинаковъ.

Сіе новое рѣшеніе по употребляемому здѣсь способу найдется такимъ образомъ. Положимъ $x + yV - ac = (pVa + qV - c)^2$ а $x - yV - ac = (pVa - qV - c)^2$, чтобъ вышло $xx + asu = (apr + cqq)$ и слѣдовъ квадратъ; но тогда будетъ $x + yV - ac = apr + 2rqV - ac - cqq$ и $x - yV - ac = apr - 2rqV - ac - cqq$, откуда слѣдуетъ $x = apr - cqq$ и $y = 2rq$. И такъ когда число ac различными способами на 2 множилися раздѣлилися можетъ , то и многія рѣшенія дать можно.

987.

Мы наивѣрены сіе изъяснить нѣкоторымъ опредѣленными формулами , и I. когда формула $xx + u$ должна
быть

быть квадратъ гдѣ $ac=1$, то взявъ $x=pr-qq$ и $y=2pq$ будетъ $xx+yy=pr+qq^2$. II. ежели формула $xx-yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=-1$, то возьми $x=pr+qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-yy=(pr-qq)^2$; III. когда сѣя формула $xx+2yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=2$, то положивъ $x=pr-2qq$, или $x=2pr-qq$, а $y=2pq$ будетъ $xx+2yy=(pr+2qq)^2$ или $(2pr+qq)^2$.

IV. Если формула $xx-2yy$ квадратомъ быть долженствуетъ, гдѣ $ac=-2$, то возьми $x=pr+2qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-2yy=(pr-2qq)^2$. V. Еслили формула $xx+6yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=6$, и слѣдов. или $a=1$, а $c=6$ или $a=2$, а $c=3$, то можно положить сперва $x=pr-6qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(pr+6qq)^2$. Потомъ можно также взять $x=2pr-3qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(2pr+3qq)^2$.

988.

Но ежели бы формулу $axx+cy$ квадратомъ здѣлать надлежало, то уже
выше

выше объявлено, что сему учиниться не
льзя, ежели нѣтъ случая напередъ из-
вѣстнаго, въ которомъ сія формула
дѣйствительно квадратомъ быть можетъ.
И по сему извѣстной случай пусть бу-
детъ; когда $x=f$, а $y=g$; такъ что
 $aff+egg=bb$, и тогда формулу нашу въ
другую сего роду $ix+aciu$ обратить мо-

жно, положивъ $t=\frac{afx+egy}{b}$, а $u=\frac{gx-fy}{b}$,

будетъ $ix=\frac{aaffxx+2acfgxy+ecggyy}{bb}$ и iu

$=\frac{egxx-2fgxy+ffyy}{bb}$, откуда слѣдуетъ

$ix+aciu=\frac{aaffxx+ecggyy+acfgxx+acffyy}{bb}$

$=\frac{axx'aff+egg)+cyv(aff+egg)}{bb}$; но $aff+egg$

$=bb$, то $ix+aciu=axx+cyv$; и такимъ
образомъ предложенная формула $axx+cyv$
перемѣнится въ сію $ix+aciu$, которая
по данному здѣсь правилу легко квадра-
томъ явлена быть можетъ.

989.

Поступимъ теперь далѣе и рассмотримъ какимъ бы образомъ формулу $axx + cy$, гдѣ x и y между собою недѣлимы, кубомъ задѣлать можно было; къ чему прежнія правила недоспѣшны, но показанные здѣсь способы съ наилучшимъ успѣхомъ употребить можно. Причѣмъ сіе особливо примѣчания достойно, что сію формулу всегда кубомъ задѣлать можно, какого бы свойства числа a и c ни были, чего при квадратахъ не бывало, ежели ни одного случая напередъ не было извѣстнаго: что такъ о всѣхъ четныхъ степеняхъ разумѣется; а въ нечетныхъ яко въ 3 ей, 5 той, 7 мой рѣшеніе за всегда возможно.

990.

И такъ когда формулу $axx + cy$ кубомъ задѣлать надлежитъ, то положи подобнымъ образомъ, какъ и прежде, $xVa + yV - c = (pVa + qV - c)^2$, а $xVa - yV - c = (pVa - qV - c)^2$: тогда выдѣль изъ того про-

произведение $axx + cyu = (arp + cqq)^2$, слѣдов.
 наша формула кубъ. Все дѣло въ томъ
 только состоятъ, можно ли здѣсь x и y
 опредѣлять рациональными, что учинится
 когда положенные кубы дѣйствительно
 взяты будутъ, и тогда получимъ мы сіи
 два уравненія $xVa + yV - c = ar^3Va + 3arqqV - c$
 $- 3crqqVa - cq^3V - c$, и $xVa - yV - c = ar^3Va$
 $- 3arqqV - c - 3crqqVa + cq^3V - c$; откуда
 очевидно слѣдуетъ, что $x = ar^3 - 3crqq$, а
 $y = 3arqq - cq^3$.

Сыскать наприм. два квадрата xx и
 yy , коихъ бы сумма $xx + yy$ составила
 кубъ: понеже здѣсь $a = 1$ и $c = 1$, то по-
 лучимъ мы $x = r^3 - 3rqq$ и $y = 3rqq - q^3$ и
 будетъ $xx + yy = (rr + qq)^2$. Пусть бу-
 детъ $r = 2$ и $q = 1$ найдемъ $x = 2$ а $y = 11$;
 отсюда $xx + yy = 125 = 5^3$.

§91.

Разсмотримъ сію формулу $xx + 3yy$,
 которую кубомъ здѣлать должно. По-
 неже здѣсь $a = 1$, $c = 3$, будетъ $x = r^3$
 $- 9rqq$

Упопребляемые здѣсь способы пѣмѣ
наипаче достопамятнѣе, что помощью
ирраціональныхъ, или еще и мнимыхъ
формулъ такіа рѣшенія ссысканы, къ
чему одни только раціональныя, да еще
и цѣлыя претовались числа. Но гораздо
достопамятнѣе, что въ тѣхъ случаяхъ,
гдѣ неизвлекаемость уничтожается, спо-
собъ нашъ больше не годится; ибо когда
наприм. $x + \sqrt{-c}$ должно быть кубическое
число, то заподлинно заключить можно,
что и оба неизвлекаемые множители опи-
шуда $x + \sqrt{-c}$ и $x - \sqrt{-c}$ кубы были дол-
женствовуютъ; потому что оныя между
собою недѣлимы; ибо числа x и $\sqrt{-c}$ об-
щаго дѣлителя не имѣютъ. Но еслили
бы неизвлекаемость $\sqrt{-c}$ уничтожилась,
какъ наприм. $c = -1$, то бы основаніе
се болѣе мѣста не имѣло; потому что
тогда бы оба множителя $x + \sqrt{-c}$ и $x - \sqrt{-c}$
имѣли общихъ дѣлителей, не смотря
на то, что x и $\sqrt{-c}$ оныхъ имѣть не бу-
дутъ; а именно когда они оба нечет-
ныя числа.

И такъ ежели $xx-yu$ должно быть кубическое число, то не нужно, чтобы какъ $x+y$, такъ и $x-y$ само по себѣ было кубомъ; но можно положить $x+y = 2p^3$, а $x-y = 4q^3$, и тогда $xx-yu$ безспорно было бы кубомъ, а именно $8p^3q^3$, коего корень кубичной есть $2pq$, и слѣд. будетъ $x = p^3 + 2q^3$ и $y = p^3 - 2q^3$. Но ежели формула $axx+cyu$ на 2 рациональные множителя раздробиться не можетъ, то и никакія другія рѣшенія имѣть мѣста не могутъ, кромѣ пѣхъ, кои здѣсь предложены.

994.

Сіе разсужденіе намірены мы изъяснить нѣкоторыми достопамятными вопросами,

Вопросъ. Требуется въ цѣлыхъ числахъ квадратъ xx , къ которому когда придастся 4, то бы вышелъ кубъ. Оныя суть 4 и 121, но не можно ли еще больше такихъ найти, о томъ здѣсь спрашивается ²

Понеже 4 есть квадратное число, по ищи сперва случай, гдѣ $xx+yy$ будетъ кубъ, что какъ изъ прежняго явствуетъ, здѣлается, когда $x=p'-3rrq$ и $y=3rrq-q'$, но здѣсь $yy=4$, т. е. $y=\pm 2$, слѣдов. должно быть $3rrq q'=\pm 2$, или $3rrq q'=-2$. Въ первомъ случаѣ будетъ $q(3rr-qq)=2$, слѣдов. q дѣлитель 2 кѣ, и по сему пусть будетъ сперва $q=1$, и получится $3rr-1=2$, слѣдов. $r=1$; по чему $x=2$, а $xx=4$.

Возьми $q=2$, будетъ $6rr-8=\pm 2$ взявъ знакъ $+$ найдемъ $6rr=10$ и $rr=\frac{5}{3}$, по сему знаменованіе r было бы неизвѣстное и здѣсь бы не годилось. Взявъ знакъ $-$ будетъ $6rr=6$ и $r=1$, слѣдов. $x=1$ и больше случаевъ не бывають. Почему два только квадрата даны быть могутъ, а именно 4 и 121, кѣ которымъ когда придастся 4, то произойдутъ кубы.

995.

Вопросъ. Найми такіе квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кѣ которымъ когда придастся 2, то произойдутъ кубы, какъ

какъ то съ квадратомъ 25 дѣлается ; спрашивается , нѣможно ли еще больше такихъ найти ?

Когда $xx+2$ должно быть кубическое число , а 2 есть удвоенной квадратъ , то ищи сперва случай , въ которомъ формула $xx+2y$ будетъ кубъ , что нѣ прежней 991 слѣдуетъ дѣлается , гдѣ $a=1$, и $c=2$, $x=p^2-6pqq$ и $y=3ppq-2q^2$; но здѣсь $y=+1$, то должно быть $3ppq-2q^2=q(3pp-2qq)=+1$, и слѣдоват. q есть дѣлитель 1 цы ; по сему пусть $q=1$, будетъ $3pp-2=+1$, взявъ верхній знакъ получится $3pp=3$ и $p=1$, слѣдоват. $x=5$, а исподней знакъ дастъ для p не-извлекаемое знаменованіе , которое здѣсь не годится ; откуда слѣдуетъ , что только одинъ квадратъ 25 въ цѣлыхъ числахъ желаемое свойство имѣетъ.

996.

Вопросъ. Сыскать такіе квадраты , кои будучи помножены на 5 и сложены съ 7-мью дѣлаютъ кубъ , или $5xx+7$ будетъ кубъ ?

В 3

Ищи

Ищи сперва нѣ случаи , когда $5xx + 7yy$ будетъ кубъ , что по 991 спастъ учи-
 нится , гдѣ $a=5$, $c=7x=5p^2-21pqq$ и
 $y=15ppq-7q^2$; понеже здѣсь $y=+1$, то
 $15ppq-7q^2=q(15pp-7qq)=+1$ и q должно
 быть дѣлителемъ 1 цы , слѣдовательно 1.
 По сему $15pp-7=+1$; но оба случаи
 дають вмѣстѣ p нѣчто неизвлекаемое ,
 однакожъ изъ сего заключить не лзя ,
 чюбѣ вопросъ былъ совсемъ невозможной ,
 потому что p и q дроби быть могутъ ,
 когда $y=1$, а x цѣлое число. Сіе дѣй-
 ствительно бываетъ , когда $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$,
 то будетъ $y=1$, $x=2$; но съ другими
 дробями дѣйствіе сіе невозможно.

997.

Вопросъ. Требуется такіе квадраты
 въ цѣлыхъ числахъ , кои взявъ вдвое и
 отнявъ изъ нихъ 5 дають кубъ , или
 $2xx-5$ должно быть кубъ ? Ищи
 сперва такіе случаи , въ которыхъ $2xx$
 $-5y$ будетъ кубъ , что здѣлается по 991
 спастъ , гдѣ $a=2$ и $c=-5$, когда $x=$
 $2p^2$

$2p^2 + 15qq$ и $y = 6pq + 5q^2$, но зѣсь должно бытъ $y = +1$ слѣдовательно $6pq + 5q^2 = q(6p + 5q) = +1$, чему въ цѣлыхъ числахъ быть не лзя, да и въ дробяхъ такожде, для того сей случай весьма досклинѣ примѣчанія, въ которомъ коня рѣшеніе и имѣетъ мѣсто, а именно: ежели $x = 4$, ибо тогда будетъ $2xx - 5 = 27$ кубъ 3 хъ и немалой силой въ важности сыскать сему приину.

998.

Возможно дѣло, что $2xx - 5y$ будетъ кубъ, коего корень имѣетъ сію формулу $2p - 5q$ т. е. когда $x = 4$, $y = 1$, $p = 2$, $q = 1$ и еще имѣетъ случай, въ которомъ $2xx - 5y = (2p - 5q)^2$, не смотря на то, что оба множители изъ $2xx - 5y$ т. е. $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$ не кубы. Однакожъ они по сему способу кубы изъ $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ и $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ быть должны; ибо въ нашемъ случаѣ $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$; напротивъ того $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$, что совсемъ

в 4 сб

сб $4\sqrt{2} + \sqrt{5}$ не согласуетъ. Но надлежитъ примѣчать, что Формула $rr - 10ss$ въ безконечно многихъ случаяхъ 1, или -1 быть можетъ; а именно когда $r=3$ и $s=1$; потомъ когда $r=19$ и $s=6$, кои на формулу $2pp - 5qq$ помноживъ, даюшъ пакы число послѣдней формулы.

И по сему пусть будетъ $ff - 10gg = 1$, и вмѣсто прежняго $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)$ положимъ вообще $2xx - 5yy = (ff - 10gg)(2pp - 5qq)^n$; взявъ множитель будетъ $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = (f + g\sqrt{10})(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^n$; но се какъ уже мы видѣли $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^2 = (2p^2 + 15qq)\sqrt{2} + (6pq + 5q^2)\sqrt{5}$ вмѣсто сего ради краткости поставимъ $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, что на $f + g\sqrt{10}$ помноживъ даетъ $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$, которое должно быть равно $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$, откуда выходяшъ $x = Af + 5Bg$ и $y = Bf + 2Ag$; а понеже $y = \pm 1$, то необходимо нужно, чтобъ $6pq + 5q^2 = 1$ было. Но довольно если только формула $Bf + 2Ag$, т. е. $f(6pq + 5q^2) + 2g(2p^2 + 15qq)$ равно ± 1 , гдѣ f и g различные знаменанія

нованія имѣшь могутъ. Пусть будетъ
наприм. $f=3$ и $g=1$, то сія формула
($18rrq+15q^2+4r^2+3orqq$ должна быть
равна ± 1 , или должно быть $4r^2+18rrq$
 $+3orqq+15q^2=\pm 1$.

99.

Сие затрудненіе, выводить всѣ та-
кіе возможные случаи, бываетъ только
тогда, когда въ формулѣ $axx+суу$ чи-
сло c будетъ отрицательное, ибо тогда
сія формула $axx-суу$, или сія $xx-асуу$,
которая съ нею великое сходство имѣетъ
единица быть можетъ; чему однако ни-
когда спастись не лзя, когда c положи-
тельное число; понеже $axx+суу$ или
 $xx+асуу$ даетъ завсегда большія числа
чѣмъ большіе берутся x и y , того ради
предписанной адѣсь способъ въ такихъ
только случаяхъ съ пользою употреблять
можно, когда возмущся оба числа a и c
положительныя.

1000.

Теперь приступаемъ мы къ четвер-
той степени и прежде всего усматрива-

В 5

смѣ

емъ , что если формула $axx+суу$ должна быть биквадратъ , то число a надлежитъ быть $=1$; ибо если оно не квадратъ , то или бы совсемъ не лзя сей формулы задѣлать только квадратомъ , или если бы возможно было , то можно бы ее превратить въ такой видъ : $xx+acy$; и такъ ограничиваемъ мы вопросъ на послѣдней формулѣ , съ которою прежняя $xx+суу$ когда $a=1$ сходствуетъ . Теперь дѣло состоитъ въ томъ какого состоянiя должны быть знаменованiя чиселъ x и y чтобъ сiя формула $xx+суу$ была биквадратъ . Она состоитъ изъ двухъ множителей $(x+y\sqrt{c})$ $(x-y\sqrt{c})$ то долженъ каждой быть биквадратъ и для того надлежитъ положить $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})^2$ и $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})^2$ откуда формула наша равна будеть сему биквадрату $(pp+сqq)^2$, а самыя буквы x и y изъ разрѣшенiя сей формулы опредѣляются , какъ слѣдуетъ :

$$x+y\sqrt{c}$$

$x + yV = c = p^2 + 4p^2qV - c - 6ppqq - 4cpq^2V - c + ccq^2$
 $x - yV = c = p^2 - 4p^2qV - c - 6ppqq + 4cpq^2V - c + ccq^2$
 слѣдов, $x = p^2 + 6ppqq + ccq^2$ и $y = 4p^2q - 4pq^2$.

1001.

И такъ когда $xx + yy$ долженству-
 етъ быть сиквадратомъ, и понеже здѣсь
 $c = 1$, то имѣемъ мы сіи знаменованія
 $x = p^2 + 6ppqq + q^4$ и $y = 4p^2q - 4pq^2$ и тогда
 будетъ $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Положивъ наприим $p = 2$ и $q = 1$, по-
 лучится $x = 7$ и $y = 24$; отсюда будетъ
 $xx + yy = 625 = 5^4$; взявъ еще $p = 3$ и $q = 2$
 найдемся $x = 119$ и $y = 120$, по чему xx
 $+ yy = 13^4$.

1002.

Во всѣхъ чстныхъ степеняхъ, ко-
 ими формулу здѣлать надлежитъ, необ-
 ходимо нужно, чѣмъ сію формулу ква-
 драпомъ здѣлать можно было, на ко-
 торой конецъ довольно знать одинъ
 только случай, въ которомъ сіе бывающъ;
 и тогда можно сей формулѣ, какъ уже
 мы

мы видѣли, дать сей видъ $11+аси$, гдѣ первой членъ умноженъ на 1, и слѣдств. въ формулѣ $xx+су$ содержится, которую послѣ подобнымъ образомъ какъ б пою, такъ и другою еще вышшею здѣлать можно.

1003.

Въ нечетныхъ степеняхъ сей договоръ не нуженъ; но числа a и c , какого бы свойтва ни были, то всегда можно формулу $axx+су$ каждою нечетною здѣлать. Желая наприм. знать 5 юю степень, то надлежитъ только положить $x\sqrt{a+y\sqrt{-c}}=p\sqrt{a+q\sqrt{-c}}$ и $x\sqrt{a-y\sqrt{-c}}=(p\sqrt{a-q\sqrt{-c}})$ и будетъ очевидно $axx+су=(ap+sq)^5$. Понеже теперь 5 яя степень изъ $p\sqrt{a+q\sqrt{-c}}$ есть $aap^4\sqrt{a}+5aa^2p^3\sqrt{-c}-10aap^2qq\sqrt{a}-10aap^2q^3\sqrt{-c}+5ccp^4q^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$, откуда сразу выключивъ можно что $x=aap^4-10aap^2qq+5ccp^4q^4$ и $y=5aap^3q-10aap^2rqq+ccq^5$.

Потребно сумму двухъ квадратовъ $xx+уу$ здѣлать 5 юю степенью. Здѣсь $a=1$, $c=1$; когда теперь возмется только

только $p=2$ и $q=1$ будишь $x=38$, $y=41$
и $xx+yy=3125=5^5$.



ГЛАВА XIII

О некоторых формулах сего рода

$ax^2 + by^2$, коихъ квадратами

зѣбать не можно.

1004.

Много труда положено въ изобрѣшеніи
двухъ биквадратовъ, коихъ бы сумма
или разность была квадратное число;
но весь трудъ былъ тщетной, и сыска-
но на концу доказательство, что ни
формулы $x^2 + y^2$, ниже сей $x^2 - y^2$ нико-
гда квадратомъ зѣбать не можно, вы-
ключая только 2 случая, а именно ко-
гда въ первой или $x=0$ или $y=0$; а въ
другой если $y=0$, или $y=x$, въ коню-
рыхъ случаяхъ дѣло совсемъ видно; но
что во всѣхъ остальныхъ оно не возмож-
но, тѣмъ нашаче доспопашно; ибо
когда

когда рѣчь о простыхъ квадратахъ , то
безконечно много рѣшеній имѣютъ мѣсто.

1005.

А что бы сіи доказательства надлежащимъ предложить порядкомъ , то прежде всего примѣчать надлежитъ , что оба числа x и y , какъ недѣлимые между собою въ разсужденіе берутся ; ибо ежели бы они должны были имѣть общаго дѣлителя наприм. D , такъ чтобъ можно было положить $x = Dr$ и $y = Dq$, то была бы наша формула $D^2r^2 + D^2q^2$ и $D^2r^2 - D^2q^2$, копорые, ежели бы они были квадраты , раздѣливъ на D^2 остались бы квадратами. Такъ чтобъ сіи формулы $r^2 + q^2$ и $r^2 - q^2$ были квадраты , гдѣ теперь числа r и q никакого болѣе общаго дѣлителя не имѣютъ ; и по сему довольно доказано , что сіи формулы въ случаѣ , когда x и y между собою недѣлимы , квадратами быть не могутъ и доказательство само по себѣ просиживаетъ до всѣхъ случаевъ , въ коихъ x и y общаго дѣлителя имѣютъ.

1006.

исоб.

И такъ здѣлasmъ начало съ суммы двухъ биквадратовъ т. е. съ формулы $x^4 + y^4$, гдѣ мы x и y какъ недѣлимые между собою числа разсмапривать будемъ; а что бы показать что $x^4 + y^4$, выключая помянутые случаи, квадратъ быть не можетъ, то производится доказательство слѣдующимъ образомъ; есть ли бы кшо законѣль опровергнуть наше положеніе, то бы надлежало утверждать, что такія знаменованія для x и y возможны, что бы $x^4 + y^4$ было квадратъ, оныя знаменованія сколь бы велики ни были: ибо заподлинно въ малыхъ ни одного не попадется.

Но ясно показать можно, что хотя бы такія знаменованія для x и y , и въ самыхъ большихъ числахъ попались; по бы изъ оныхъ заключить можно было и о малыхъ числахъ, а изъ сихъ бы еще о меньшихъ, и такъ далѣе. Но по-неже въ малыхъ числахъ такихъ знаменований нѣтъ, выключая два помянутыя,
но

но которыя ни къ какимъ другимъ насѣ не приводящъ, по заподлинно можно заключить, что и въ большихъ да и въ самыхъ пребольшихъ числахъ нѣтъ такихъ знаменованій для x и y . Равнымъ образомъ о разности двухъ биквадратовъ x^4 и y^4 доказывается, какъ мы варазъ покажемъ.

1007.

Дабы показать, что $x^4 - y^4$ квадратъ быть не можетъ, включая два случая, кои сами чрезъ себя видны, по надлежитъ примѣчать слѣдующія положенія.

- I. Полагаемъ мы, что числа x и y между собою неѣлимы, или общаго дѣлителя не имѣютъ, слѣдов. оба или нечетные или одно четное, а другое нечетъ.
- II. Но оба нечетныя быть не могутъ, ибо сумма двухъ нечетныхъ квадратовъ ни когда квадратомъ быть не можетъ; потому что нечетной квадратъ всегда въ формулѣ $8n + 1$ содержащаяся, и слѣдов. сумма двухъ нечетныхъ

четныхъ квадратовъ имѣла бы формулу $8n+2$, которая на 2, а не на 4 дѣлится, и слѣдов. квадратомъ быть не можетъ; что также съ двумя нечетными биквадратами бываетъ.

III. И по сему если бы $x^2 + y^2$ было квадратъ, то должно одному быть четному, а другому нечетному, какъ мы выше сего видѣли, что если сумма двухъ квадратовъ должна быть квадратъ, то корень одного чрезъ $pr-qq$, а другаго чрезъ $2pq$ изъяснить можно, откуда слѣдуетъ, что должно быть $xx=pr-qq$, а $yy=2pq$ и тогда бы было $x^2 + y^2 = (pr+qq)^2$.

IV. И такъ было бы здѣсь y четное, а x нечетное число, и $xx=pr-qq$, то надлежитъ одному изъ чиселъ p и q быть четному, а другому нечетному; но первое p не можетъ быть четное: потому что иначе $pr-qq$, какъ число формулы $4n+1$, или $4n+3$, никогда квадратомъ быть не можетъ.

Томъ II. В жеиъ,

жегѣ, и слѣдов. должно бы быть p нечетное, а q четное, гдѣ само по себѣ разумѣется, что оныя должны быть между собою нецѣлимы.

V. Когда $pp - qq$ должно быть равно квадрату xx , то учинится сѣ, какъ мы прежде видѣли, ежели $p = rr + ss$ и $q = 2rs$; ибо отсюда было бы $xx = (rr - ss)^2$ и слѣдов. $x = rr - ss$.

VI. Но yy долженствуетъ также быть квадратъ, и когда мы только имѣли $yy = 2pq$, то будетъ теперь $yy = 4rs(rr + ss)$, которая формула должна быть квадратъ, слѣдов. $rs(rr + ss)$ должно быть такожде квадратъ, гдѣ r и s нецѣлимы между собою числа, и поному находящіяся здѣсь 3 множителя r , s и $rr + ss$ общаго дѣлителя не имѣющѣ.

VII. Но ежели произведеніе изъ большого числа множителей, кои между собою нецѣлимы, должно быть квадратъ, то

то каждой множитель самъ по себѣ долженъ быть квадратъ; и такъ положи $t = II$ и $u = III$, то должно также $t^2 + u^2$ быть квадратъ; и по сему ежели бы $x^2 + y^2$ было квадратное число, то бы также и $t^2 + u^2$, т. е. сумма двухъ биквадратовъ была бы квадратъ. При чемъ надлежитъ примѣчать, что было бы $xx = t^2 + u^2$ и $yy = 4tiii(u^2)$, гдѣ очевидно числа t и u гораздо меньши нежели x и y , записавъ что x и y опредѣляются уже четвертыми степенями чиселъ t и u , и слѣдов. безспорно были бы гораздо больше.

VIII. И такъ ежели бы два квадрата какъ x^2 и y^2 въ самыхъ большихъ числахъ были, то можно бы опшуда вывести сумму двухъ гораздо меньшихъ биквадратовъ, которая бы равнымъ образомъ была квадратъ; а отсюда можно бы еще о меньшихъ суммахъ заключить, и наконецъ пришли бы къ самымъ малымъ числамъ;

но когда такая сумма въ малыхъ числахъ не возможна, то слѣдуетъ изъ сего, что и въ пребольшихъ числахъ оной суммы не будетъ.

IX. Хотя и можно здѣсь сказать, что въ малыхъ числахъ дѣйствительно такія есть, какъ уже съ начала примѣчено, а именно когда одинъ биквадратъ $= 0$; но къ сему случаю заподлинно припиши нѣльзя, когда такимъ образомъ къ малымъ навадъ пойдешь; ибо было бы въ малой суммѣ $x^2 + u^2$, или $x = 0$, или $u = 0$, то должно бы также и въ большой суммѣ быть $y = 0$, которой случай въ разсужденіе не входитъ.

1008.

Теперь приступаемъ мы къ другому главному положенію, что и разность двухъ биквадратовъ $x^2 - y^2$ никогда квадратомъ быть не можетъ, кромѣ случаевъ $y = 0$ и $y = x$: ради сего доказательства надлежитъ примѣчать слѣдующіе пункты.

I.

I. Когда числа x и y между собою недѣлимы, и слѣдов. или оба нечетныя, или одно четное, а другое нечетно, то въ обоихъ случаяхъ разность двухъ квадратовъ можетъ быть паки квадратъ; чего ради сии два случая особливо примѣчать должно.

II. И такъ пусть будутъ въ первыхъ оба числа x и y нечетныя; и положи $x = p + q$, а $y = p - q$, и тогда одно изъ чиселъ p и q должно быть четное, а другое нечетно, то будемъ $xx - yy = 4pq$, $xx + yy = 2pp + 2qq$, слѣдов. наша формула $x^2 - y^2 = 4pq$, $2pp + 2qq$, которая должна испускаться быть квадратомъ, почему и четвертая ея часть, т. е. $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, коей множители между собою недѣлимы, и слѣдов. каждый долженъ быть квадратомъ; а понеже одно число p четное, а другое q нечетно, то имѣемъ мы 3хъ между собою недѣлимыхъ множителей $2p$, q и $pp + qq$. И такъ чтобъ первые два являлись квадратами, то положи $2p = 4rr$, или

Б 3

$p = 2rr$

$p=2rr$, а $q=ss$, гдѣ s нечетѣ будещѣ третей множитель $4r^2+s^2$, которой также квадратѣ быть долженѣ.

III. Но s^2+4r^2 есть сумма двухѣ квадратовѣ, изѣ которыхѣ s^2 нечетѣ, а $4r^2$ четѣ, по положи корень перваго $ss=tt-uu$, гдѣ t нечетѣ, а u четѣ, послѣднѣй же $2rr=2tu$, или $rr=tu$, гдѣ t и u между собою не-дѣлимы.

IV. Понеже $tu=rr$ квадратѣ быть долженствуетѣ, по какѣ t такѣ и u надлежитѣ быть квадратомѣ; сего ради положи $t=mm$ а $u=nn$, гдѣ m нечетѣ, а n четѣ, будещѣ $ss=m^2-n^2$ такѣ что опять разность двухѣ биквадратовѣ, а именно m^2-n^2 должна быть квадратѣ, но явно есть, что сѣ числа были гораздо меньше нежели x и y .

Потому что t и s очевидно меньше нежели x и y , а сверхѣ сего еще m и n меньше нежели t и s , и такѣ ежели бы въ большихѣ числахѣ дѣло было возмо-
жное

жное и $x^4 - y^4$ было бы квадратъ, то было бы и въ самыхъ малыхъ также возможно, и такъ далѣе, пока бы не пришли къ самымъ малымъ числамъ, гдѣ бы дѣло было невозможно.

V. Но самыя меньшія числа, въ ко-
рыхъ сіе возможно, суть когда одинъ
биквадратъ равенъ 0, или равенъ дру-
гому. По первому надлежало бы быть
 $n=0$, слѣдов. $u=0$, потомъ $r=0$ и
 $p=0$, $x=y$, или $x^4=y^4$; но здѣсь о
такомъ случаѣ не говорится. А
ежели бы $n=t$, то было бы $l=u$,
потомъ $l=0$ и $q=0$ и наконецъ $x=y$,
какой случай мѣста здѣсь не имѣетъ.

1009.

Здѣсь можно сказать, что когда
 t нечетъ, а n четъ, то послѣдняя раз-
ность не сходствуемъ больше съ первою,
и такъ отсюда далѣе о малыхъ числахъ
заключать не лзя. Но довольно когда
отъ первой разности дошли до другой

и теперь покажемъ, что также $x^4 - y^4$ квадратомъ быть не можеть, когда одинъ биквадратъ четной, а другой нечетной.

I. По первому когда бы x^4 четнъ, а y^4 нечетнъ, то бы дѣло само по себѣ было не возможное, потому что вышло бы число формулы $4n + 3$, которое квадратомъ быть не можеть. И по сему пусть будетъ x нечетнъ, а y четнъ, то должно быть $xx = pp + qq$ и $yy = 2rq$ и тогда выдѣтъ $x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2$, гдѣ изъ p и q одно должно быть четное, а другое нечетное.

II. когда $pp + qq$ должно быть квадратъ, то будетъ $p = rr - ss$, а $q = 2rs$, слѣдов. $x = rr + ss$; но отсюда $yy = 2(rr - ss)2rs$ или $yy = 4rs(rr - ss)$, которое должно быть квадратъ и слѣдоваш. четвертая онаго также четнъ т. е. $rs(rr - ss)$, гдѣ множители между собою не дѣлимы.

III. и такъ положивъ $r = ii$, $s = iii$ будетъ прѣшей множитель $rr - ss = i^4 - ii^4$, которой

которой равнымъ образомъ долженъ быть квадратъ; но оной также есть разность двухъ биквадратовъ, кои гораздо меньше первыхъ, то получаетъ чрезъ сие доказательство совершенную крѣпость; такъ что ежели бы въ большихъ числахъ разность двухъ биквадратовъ была квадратъ, то бы можно отсюда найти всегда меныиѣ такіе разности, не приходя къ очевиднымъ двумъ случаямъ; и по сему заподлинно въ большихъ числахъ сие также не возможно.

ІОЮ.

Первую часть сего доказательства, когда оба числа x и y взяты нечетныя, можно сократить слѣдующимъ образомъ. Ежели бы $x^2 - y^2$ было квадратъ то должно бы быть $xx = pp + qq$ и $yy = pp - qq$, гдѣ нѣ буквѣ p и q одна четная, а другая нечетъ; но тогда бы вышло $xy = p^2 - q^2$, слѣдов. $p^2 - q^2$ должно бы также быть квадрашомъ, что есть раз-

ность двухъ такихъ биквадратовъ, изъ коихъ одинъ четной, а другой нечетнъ, а что сему статься не лзя, по вторая доказательства часнъ показываеиъ.

1011.

И такъ доказали мы си два главные правила, что ни сумма, ни разность двухъ биквадратовъ никогда квадратнымъ числомъ быть не можешъ, исключая немогие очевидные случаи.

Почему сжали другіе формулы, кои квадратамъ зѣлать надлежитъ, такого свойства будиъ, что или сумма или разность двухъ биквадратовъ должна быть биквадратъ, по равнымъ образомъ такіе формулы не возможны. Сіе случаетъ въ ниже слѣдующихъ формулахъ, кои мы присовокупилъ наиѣрены.

- I. Не возможно чтобъ формула $x^2 + 4y^2$ была квадратъ, ибо она естъ сумма двухъ биквадратовъ; по должно бы быть $xx - pp - qq$ и $2yy = 2pq$, или $yy = pq$, но p и q между собою неѣлимыя числа

ела, и для того надлежало бы каждому быть квадратомъ; сего ради положивъ $p=rr$, $q=ss$ будемъ $xx=r^2-s^2$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ должна быть квадратъ, чему спастся не лзя.

II. Не можно также чпобъ формула x^4-4y^4 была квадратъ; ибо надлежало бы быть $xx=pp+qq$, $2yy=2pq$, но тогда вышло бы $x^4-4y^4=(pp-qq)^2$: но $yy=pq$, то должно бы p и q каждому быть квадратомъ. Взявъ $p=rr$, $q=ss$ получимъ $xx=r^2+s^2$, слѣдов. сумма двухъ биквадратовъ долженствовала бы быть квадратомъ, чему спастся не лзя.

III. Формула $4x^4y^4$ не можетъ также быть квадратомъ; ибо тогда y неопмѣнно должно бы быть четное число: положивъ $y=2z$ было бы $4x^4-16z^4$ и четвертая сего часть x^4-4z^4 должна быть квадратъ; что по прежнему не возможно.

IV.

IV. Формулѣ $2x^4 + 2y^4$ квадратомъ быть не лзя, потому что оной долженъ быть четной и слѣд. $2x^4 + 2y^4 = 4xz$, то вышло бы $x^4 + y^4 = 2xz$, и по сему $2xz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$, слѣдов. квадратъ. Равнымъ образомъ было бы $2xz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ также квадратъ. Но понеже какъ $2xz + 2xxyy$ такъ и $2xz - 2xxyy$ вышли бы квадраты, то надлежало бы ихъ произведенію $4x^4 - 4x^4y^4$ и четвертой его части быть квадратомъ; но сія четвертая часть есть $z^2 - x^4y^4$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ, чему спастись не можно.

V. На конецъ формула $2x^4 - 2y^4$ квадратомъ быть не можеть; ибо оба числа x и y нечетныя; въ противномъ случаѣ имѣли бы они общаго дѣлителя. Также одно четное, а другое нечетное быть не могутъ: потому что иначе одна бы часть на 4, а другая только на 2 и слѣдов. самая формула на 2 только могла бы раздѣляться; для того надлежитъ обоимъ

имѣ быть нечетнымъ. Возмѣ $x = p + q$ и $y = p - q$, то одно изъ чиселъ p и q четное, а другое нечетно, и понеже $2x^4 - 2y^4 = 2(xx + yy)(xx - yy)$, то получимся $xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq)$, а $xx - yy = 4pq$, и по сему формула наша $16pq(pp + qq)$ и 16-тая ся часть $pq(pp + qq)$ должна быть также квадратомъ. Но когда множители между собою не-дѣлимы, то каждому надлежитъ быть квадратомъ. Положивъ вмѣсто двухъ первыхъ $p = rr$, $q = ss$ будетъ пршей $= r^4 + s^4$, которой также долженъ бы быть квадратомъ; но сему спастись не можно.

1012.

Подобнымъ образомъ доказать можно, что формула $x^4 + 2y^4$ квадратомъ быть не можетъ; самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

1. x не можетъ быть четное число, ибо y было бы нечетное и формула могла бы только на 2, а не на 4 раздѣлиться,

дѣлиться ; чего ради x должно быть нечетное число.

II. Положи квадратной корень формулы нашей $=xx + \frac{2pyy}{q}$, чтобы оной былъ нечетъ и будетъ $x^2 + 2y^2 = x^2 + \frac{4pxxy}{q} + \frac{4p^2y^2}{q^2}$, гдѣ x^2 уничтожается , а остальные члены раздѣливъ на yy и помноживъ на qq дають $4pqxx + 4p^2yy = 2qqyy$, или $4pqxx = 2qqyy - 4p^2yy$, отсюда $\frac{xx}{yy} = \frac{qq - 2p^2}{2pq}$, слѣдовательно $xx = qq - 2p^2$, а $yy = 2pq$, шакіе же формулы , какъ и прже были.

III. И такъ $qq - 2p^2 = xx$ надлежало бы пакы быть квадратъ , что иначе учинишься не можетъ , какъ только ежели $q = rr + 2ss$, а $p = 2rs$, и тогда бы было $xx = (rr + 2ss)^2$, а потомъ $yy = 4rs(rr + 2ss)$ и четвертая сего также часть $rs(rr + 2ss)$ должна бы быть квадратъ , слѣдов. r

и z каждой особливо. Положивъ $t = 2u$, $z = 3u$ будемъ иметьъ множитель $tt + 2zz = t^2 + 2u^2$, которой также долженъ быть квадратъ.

IV. Чего ради если бы $x^2 + 2y^2$ было квадратъ, то бы и $t^2 + 2u^2$ было квадратомъ, гдѣ числа t и u были бы гораздо менше нежели x и y , и такимъ бы образомъ всегда доходить можно было до меньшихъ чиселъ; но когда сія формула въ малыхъ числахъ квадратомъ быть не можетъ то она, какъ легко усмотрѣть можно, не будетъ также квадратомъ и въ большихъ числахъ.

1013.

Что же напротивъ того до формулы $x^2 - 2y^2$ касается, то объ ней доказать не лзя, чпубъ она не могла быть квадратомъ; и когда подобнымъ образомъ изчисленіе производить станемъ, то можно бесконечно много найти случаевъ, въ которыхъ она действительно будетъ квадратъ; ибо если $x^2 - 2y^2$ должно-

жно быть квадратомъ . то выше сего показано, что $xx = pp + 2qq$, а $y = 2pq$, и получився тогда $x^2 - 2y^2 = (pp - 2qq)^2$; но и $pp + 2qq$ также квадратъ быть долженствуетъ. Сіе учинится ежели $p = rr - 2ss$, а $q = rs$ и будетъ $xx = (rr + 2ss)^2$. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что здѣлалось бы сіе положивъ $p = 2ss - rr$, $q = 2rs$; по чему сіи два случая разсмотреть должно.

I. Пусть будетъ во первыхъ $p = rr - 2ss$, $q = 2rs$, и будетъ $x = rr + 2ss$; а понеже $yy = 2pq$. то $yy = 4rs(rr - 2ss)$ и должны r и s быть квадратами: чего ради взявъ $r = tt$ $s = uu$, будетъ $yy = 4tuu(t^2 - 2u^2)$ и слѣдов. $y = 2u\sqrt{t^2 - 2u^2}$; а $x = t^2 + 2u^2$.

И такъ ежели $t^2 - 2u^2$ есть квадратъ, то будетъ также $x^2 - 2y^2$ квадратъ. Хотя t и меньшія числа нежели x и y , то не лзя по прежнему заключить чшобъ $x^2 - 2y^2$ могло быть квадратъ. понеже опшуду приходимъ мы къ подобной формулѣ въ меньшихъ числахъ; ибо $x^2 - 2y^2$

-2у* можетъ быть квадратъ не доходя до формулы $t^2 - 2u^2$, потому что сіе инымъ образомъ учиниться можетъ, а именно: въ другомъ случаѣ, которой мы еще разсмотримъ ниже.

II. По сему пусть будетъ $p=2ss-rr$, $q=2rs$, то хотя и будетъ по прежнему $x=rr+2ss$; но для у получимся $yu=2pq=4rs(2ss-rr)$. Взявъ теперь $r=ti$, $s=ui$ получится $yu=4tuiu(2u^2-t^2)$. слѣд. $y=2uiu\sqrt{(2u^2-t^2)}$, а $x=t^2+2u^2$; откуда явствуетъ, что формула наша x^2-2y^2 также квадратъ быть можетъ, ежели сія $2u^2-t^2$ квадратомъ будетъ. Сіе очевидно сдѣлается, когда $t=1$, $u=1$, почему получимъ $x=3$, $y=2$, откуда формула наша будетъ $81-2.16=49$.

III. Мы уже прежде видѣли, что $2u^2-t^2$ будетъ квадратъ, когда $u=13$ и $t=1$, потому что тогда $\sqrt{(2u^2-t^2)}=239$. Поставивъ теперь сіи знаменования вмѣсто t и u получимъ новый случай для нашей формулы; а именно $x=1+2.13^2=57123$ и $y=2.13.239=6214$.

Тамъ II.

Э

IV.

IV. Но какъ скоро найдены знаменования вмѣсто x и y , то можно оныя поставить въ формулѣ No 1, вмѣсто i и u и получатся новыя вмѣсто x и y .

Найдѣмъ $x=3$, $y=2$, положимъ въ первомъ рѣшеніи $i=3$, $u=2$, и тогда $V(i^2-2u^2)=7$, то получимъ новыя знаменования $x=81+2.16=113$ и $y=2.3.2.7=84$, а отсюда найдемъ $xx=12769$, $x^2=163047361$, потомъ $yy=7056$, $y^2=49787136$, по сему будетъ $x^2-2y^2=63473089$ чего квадрапной корень есть 7967, которой во всемъ сходствуетъ съ положенными съ начала $pp-2qq$; ежели $i=3$, $u=2$ будетъ $r=9$ и $s=4$, чего ради $p=81-32=49$ и $q=72$; отсюда $pp-2qq=2401-10368=-7967$.

ГЛАВА XIV.

Разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ принадлежащихъ до сей части аналитики.

1014.

До сихъ поръ изъясняли мы нужныя приемы случающіеся въ сей части аналитики, дабы рѣшить всѣ сюда принадлежащія вопросы, и сіе самое намѣрены мы здѣсь пространнѣе изъяснить нѣкоторыми предложенными вопросами съ ихъ рѣшеніемъ.

1015.

Вопросъ. Найди число, къ которому когда придастся, или изъ онаго вычтется 1, то бы въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ?

Положи искомое число x , то какъ $x+1$, такъ и $x-1$ должно быть квадратъ, для перваго возьми $x+1=pp$, будеть $x=pp-1$, а $x-1=pp-2$, что также должно быть квадратомъ. Положивъ корень его $p-q$ будеть $pp-2=pp-2pq+qq$, гдѣ

2 1

pp

pp уничтожается и найдется $p = \frac{qq + 2}{2q}$,

а отсюда потомъ сыщется $x = \frac{q^2 + 4}{4q}$,

гдѣ q по изволению и въ дробяхъ также
взяты можно; того ради положи $q = \frac{r}{s}$

и получится $x = \frac{r^2 + 4s^2}{4rss}$, котораго мень-
шя знаменованія здѣсь предложимъ.

$$\begin{array}{l} \text{когда } r=1 \mid 2 \mid 1 \mid 3 \\ \quad \quad s=1 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \\ \text{будетъ } x=\frac{5}{4} \mid \frac{3}{4} \mid \frac{65}{16} \mid \frac{85}{16} \end{array}$$

ГОЛБ.

Вопросъ. Сыскаль число, къ кото-
рому когда два произволящія числа на
прим. 4 и 7 придадутся, то бы въ обо-
ихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему дѣлѣ Формулы $x+4$ и $x+7$
долженствуютъ быть квадраты, чего
ради положи для первой $x+4=pp$, будетъ
 $x=pp-4$; а другая формула $pp+3$ так-
же

же квадратомъ быть должна; положивъ
 ся корень $= p+q$ будетъ $pp+3=pp+2pq$
 $+qq$, откуда найдется $p=\frac{3-qq}{2q}$, слѣд.

$x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Взявъ вмѣсто q дробь $\frac{r}{s}$,

получимъ $x=\frac{9s-22rrss+r^4}{4rrss}$, гдѣ вмѣ-

сто r и s всѣ произвольныя числа брать
 можно.

Положи $r=1$ и $s=1$ будетъ $x=-3$,
 а отсюда $x+4=1$, $x+7=4$. Но если
 пожелаешь имѣть вмѣсто x положитель-
 ные числа, то возьми $r=2$, $s=1$ и полу-
 чится $x=\frac{57}{16}$ и почему $x+4=\frac{127}{16}$ и $x+7=\frac{146}{16}$.
 Еслили же положить $s=3$, $r=1$, то най-
 дется $x=\frac{153}{9}$, откуда $x+4=\frac{169}{9}$ и $x+7=\frac{106}{9}$.

Но когда послѣдней членъ дол-
 женъ превышать средней, то возьми
 $r=5$, $s=1$, и будетъ $x=\frac{11}{12}$, а отсюда
 $x+4=\frac{121}{12}$ и $x+7=\frac{106}{12}$.

1017.

Вопросъ. Сыскать такую дробь, ко-
 торую когда или придашь къ 1, или

2 3

вы-

вытхсть изъ оной , тобъ въ оныхъ случаяхъ вышелъ квадратъ ?

Когда сіи двѣ формулы $1+x$ и $1-x$ должны быть квадратами, то положи для первой $1+x=pp$, будетъ $x=pp-1$, а другая формула $1-x=2-pp$, также должна быть квадратомъ ; но здѣсь ни первой ни послѣдней членъ не квадраты , то надлежитъ смотрѣть не лзя ли попасть на такой случай , въ которомъ сіе дѣлается. Такой случай вразѣ попадется , а именно, когда $p=1$, для того возьми $p=1-q$, такъ что $x=qq-2q$ и будетъ наша формула $2-pp=1+2q-qq$, коей корень положивъ $=1-qr$, получится $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$, отсюда $2-q=2r+qrr$ и $q=\frac{2r+2}{rr+1}$, поему $x=\frac{4r-4r^2}{(rr+1)^2}$

Понеже r есть дробь , то возьми $r=\frac{t}{u}$, и будетъ $x=\frac{4tu^2-4t^2u}{(t^2+u^2)^2}=\frac{4tu(u-t)}{(t^2+u^2)^2}$, слѣдов. u должно быть меньше нежели t . и по сему положи $u=2$, $t=1$ выйдетъ $x=\frac{11}{16}$; взявъ $u=3$, $t=2$ найдется $x=\frac{120}{169}$,

а отсюда $1+x=\frac{220}{175}$, $1-x=\frac{40}{175}$, кои оба суть квадраты.

1018.

Вопросъ. Найти такія числа x , которыя когда къ 10 придадутся, или изъ 10 вычтутся, тобѣ вышли квадраты?

Обѣ сѣ формулы $10+x$ и $10-x$ должны быть квадратами, и сѣ могло бы учиниться по прежнему способу; но чтобъ показать другой путь, то приведи себѣ на память, что и произведение сихъ формулъ должно быть также квадратъ, а именно $100-xx$. Но здѣсь первой членъ уже квадратъ, то положи корень $=10-rx$, и будешь $100-xx=100-2orx+rrxx$, откуда $x=\frac{2or}{rr+1}$, но изъ сего слѣдуетъ, что произведение только квадратъ, а не каждое число особливо. Если же одно будетъ квадратъ, то и другое неотмѣнно также быть должно. Первое здѣсь $10+x=$

$\frac{10pp+20p+10}{pp+1} = \frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$, но
 $pp+2p+1$ уже квадратъ, по надлежитъ
 еще сей дроби $\frac{10}{pp+1}$ быть квадратомъ,
 слѣдов. и сей $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Теперь нужно
 только, чтобъ число $10pp+10$ было
 квадратъ, гдѣ опять случай отгадать
 надлежитъ. Оной будетъ, когда $p=3$;
 число ради положивъ $p=3+q$ получимъ
 $100+60q+10qq$, возьми сего корень
 $=10+qr$, и будетъ $100+60q+10qq$
 $=100+20qr+qqrr$, откуда $q=\frac{60-20r}{rr-10}$,
 попомъ $p=3+q$ и $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Взявъ $r=3$, будетъ $q=0$, $p=3$ и
 $x=6$; отсюда $10+x=16$ и $10-x=4$.
 Но когда возьмется $r=1$, то получимъ
 $q=-\frac{40}{9}$, $p=-\frac{17}{9}$ и $x=-\frac{274}{25}$; но все равно
 положивъ $x=\frac{274}{25}$ и будетъ $10+x=\frac{474}{25}$ и
 $10-x=\frac{16}{25}$, кои оба суть квадраты.

1019.

Примѣчаніе. Ежели соизволишь сей вопросъ вѣдѣвать всеобщимъ и для каждаго даннаго числа a число x найти пожелаешь, что бы какъ $a+x$ такъ и $a-x$ были квадраты, то рѣшеніе сіе бываетъ иногда не возможно, а имянно во всѣхъ случаяхъ, гдѣ число a меньше суммы двухъ квадратовъ. Мы уже прежде видѣли, что отъ 1 до 50 слѣдующія числа суммы двухъ квадратовъ, или кои въ формулѣ $xx+yy$ содержатся:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. слѣдоват. остальные 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48 не могутъ раздѣлиться на два квадрата. Слѣдов. какъ скоро a будетъ одно изъ сихъ послѣднихъ чиселъ, то вопросъ будетъ невозможной.

Для изъясненія сего положивъ $a+x=pp$ и $a-x=qq$ найдемся по сложению

нѣю $2a = pp + qq$, такъ что $2a$ должно быть суммою квадратовъ. Но когда $2a$ есть такая сумма, то и a также быть долженствуетъ и по сему ежели a не будетъ сумма двухъ квадратовъ, то не возможно, чтобъ $a+x$ и $a-x$ были квадратами.

1020.

По сему когда $a=3$, по вопросу невозможной, для того 3 не сумма двухъ квадратовъ. Хотя и можно сказать, что найдутся можетъ быть два квадрата въ ломаныхъ числахъ, коихъ сумма составитъ квадратъ; но и сему также спастись не лзя: ибо ежели бы было $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$, по помноживъ на $qqss$ вышло бы $3qqss = prss + qqrt$, гдѣ $prss + qqrt$ есть сумма двухъ квадратовъ, которые бы на 3 могли раздѣлиться, но мы прежде видѣли, что сумма двухъ квадратовъ другихъ дѣлителей имѣть не можетъ кромѣ пѣхъ, кои сами суть такія же суммы.

Хотя

Хотя числа 9 и 45 на 3 раздѣлишь можно, но оныя также и на 9 дѣлимы; да и каждой при шомъ квадратахъ, изъ которыхъ они состоятъ, а именно $9=3^2+0^2$ и $45=6^2+3^2$; что здѣсь мѣста не имѣетъ. По чему сие слѣдствіе справедливо, что ежели число a въ цѣлыхъ числахъ суммою двухъ квадратовъ не будетъ, ни сему и въ дробяхъ стать не лзя. А когда число a въ цѣлыхъ числахъ сумма двухъ квадратовъ, то оное и въ дробяхъ бесконечно многими способами быть можетъ суммою двухъ квадратовъ, что мы показать намѣрены.

1021.

Вопросъ. Число, которое есть сумма двухъ квадратовъ, раздробить бесконечно многими способами на суммы двухъ квадратовъ?

Пусть будетъ предложенное число $ff+gg$, и надлежитъ сыскать другіе два квадрата, яко $xx+yy$ коихъ сумма $xx+yy$ равна числу $ff+gg$, такъ что $xx+yy$
 $=ff$

$=ff+gg$. Здѣсь заразѣ видно, что ежели x будетъ больше или меньше нежели f , то напротивъ того y долженъ быть меньше или больше числа g ; чего ради возми

$x=f+pz$; $y=g-qz$ и будетъ $ff+2fpz+ppzz$

$+gg-2gqz+qqzz=ff+gg$, гдѣ ff и gg

уничтожаются, а остальные члены на z

могутъ раздѣлиться; и получимъ $2fp+$

$ppz-2gq+qqz=0$, или $ppz+qqz=2gq-2fp$, слѣдов. $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, откуда для

x и y слѣдующія найдутся знаменованія

$x=\frac{2gfpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$, и $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$,

гдѣ вмѣсто p и q всѣ возможные числа

брать можно. Пусть наприм. данное

число будетъ 2, такъ что $f=1$ и $g=1$,

будетъ $xx+yy=2$; когда $x=\frac{2fq+qq-pp}{pp+qq}$

и $y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq}$, то положивъ $p=2$, а

$q=1$ найдемъ $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{3}{2}$.

1022.

Вопросъ. Когда число a есть сумма двухъ квадратовъ, найди такія числа, чтобъ какъ $a+x$, такъ и $a-x$ были квадраты?

Пусть данное число $a=13=9+4$:
взявъ $13+x=pp$, $13-x=qq$, сложение
дастъ во первыхъ $26=pp+qq$, а вычи-
таніе $2x=pp-qq$; слѣдов. p и q такого
состоянія быть должны, чтобъ $pp+qq$
равно было 26 ти, которое число есть
также сумма двухъ квадратовъ, а имен-
но $25+1$, и такъ съ число 26 над-
лежитъ раздробить на 2 квадрата, изъ
коихъ большій взять вмѣсто pp , а мень-
шей вмѣсто qq и получився $p=5$, $q=1$,
откуда $x=12$. А попомъ по прежнему
число 26 можно безконечно многими
способами раздѣлить на два квадрата:
после $f=5$ и $g=1$, то если въ пре-
жнихъ формулахъ вмѣсто буквъ p и q
напишемъ i и u , а на мѣсто x и y
поставимъ p и q , то найдемъ $p=$
 $\frac{2iu+5(iu-11)}{11+iu}$ и $q=\frac{10iu+11-iu}{11+iu}$. Когда же

теперь

теперь возмущся вмѣсто t и u числа по изволению и опредѣляюща изъ нихъ буквы p и q , то получится искомое число $x = \frac{pp - qq}{2}$

Пусть будетъ наприм. $t = 2$, $u = 1$, то выйдетъ $p = 1$ и $q = 2$, слѣдов. $pp - qq = 1 - 4 = -3$ и $x = \frac{-3}{2}$

1023.

А что бы сему вопросу дать общее рѣшеніе, то пусть данное число будетъ $a = cc + dd$, а искомое $= z$, такъ что сн формулы $a + z$ и $a - z$ должны быть квадратами.

Положивъ $a + z = xx$ и $a - z = yy$ будетъ вопервыхъ $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$; слѣдов. квадраты x и y такого свойства быть должны, чтобъ $xx + yy = 2(cc + dd)$, гдѣ $2(cc + dd)$ есть также сумма двухъ квадратовъ, а именно: $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Возми ради краткости $c + d = f$, $c - d = g$, такъ что будетъ $xx + yy = ff + gg$; но сіе по прежнему

нему учинишся ваявъ $x = \frac{2grq - f(qq - pp)}{pp + qq}$ и

$y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, откуда получасмъ

самое легкое рѣшеніе, когда положимъ $p = 1$ и $q = 1$; ибо тогда найдемся $x = \frac{2}{5} = g = c - d$, а $y = f = c + d$; слѣдов. $z = 2cd$; а отсюда $cc + dd + 2cd = (c + d)^2$ и $cc + dd - 2cd = (c - d)^2$. Для нахождения дру-

гаго рѣшенія пусть будетъ $p = 2$, $q = 1$ и выдетъ $x = \frac{c - 7d}{5}$, а $y = \frac{7c + d}{5}$, гдѣ

какъ c и d такъ x и y можно взять отрицательными, потому что ихъ квадраты только входятъ; но когда x долженъ быть больше нежели y , то возьми d отрицательное, и найдемся $x = \frac{c + 7d}{5}$, а

$y = \frac{7c - d}{5}$; откуда $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$,

которая величина когда придася къ a , то дастъ $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, чего квадрат-

ной корень есть $\frac{c + 7d}{5}$. Если же z вы-

чтень

чтешь нѣб a , то останется $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$

сего квадратной корень есть $\frac{7c-d}{5}$

ш. с. первой x , а сей y .

1024.

Вопросъ. Найми число x , такое что ежели какъ къ нему самому, такъ и къ его квадрату xx придастся 1, тобъ въ обоихъ случаяхъ вышлѣ квадраты?

По сему обѣ формулы $x+1$ и $xx+1$ надлежитъ адблать квадратами: чего ради положи для первой $x+1=pp$ и будетъ $x=pp-1$; а вторая формула $xx+1=p^2-2pp+2$, также должна быть квадратомъ; но она есть такого свойства, что никакого рѣшенія найми не можно, прежде нежели извѣстнаго случая не будетъ; а такой случай заразъ попадаетъ, а именно: когда $p=1$; для шого возми $p=1+q$, и будетъ $xx+1=1+4qq+4q^2+q^2$, что многими способами квадратомъ адблать можно.

I. Взявъ корень $= 1 + qq$, будетъ $1 + 4qq + 4q^2 + q^4 = 1 + 2qq + q^4$, откуда $4q + 4qq = 2q$, $4 + 4q = 2$ и $q = -\frac{1}{2}$; слѣдов. $p = \frac{1}{2}$, а $x = -\frac{1}{2}$.

II. Положивъ корень $= 1 - qq$ получимъ $1 + 4qq + 4q^2 + q^4 = 1 - 2qq + q^4$, откуда $q = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$, слѣдов. $x = -\frac{1}{2}$, какъ и прежде.

III. Возми корень $= 1 + 2q + qq$, чтобы первые и два послѣдніе члены уничтожились, и будетъ $1 + 4qq + 4q^2 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^2 + q^4$; отсюда $q = -2$ и $p = 1$, по чему $x = 0$.

IV. Можно также положить корень $= 1 - 2q - qq$, и будетъ $1 + 4qq + 4q^2 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^2 + q^4$, откуда $q = -2$, какъ и прежде.

V. Для уничтоженія 2хъ первыхъ членовъ возми корень $= 1 + 2qq$, и будетъ $1 + 4qq + 4q^2 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^2$, откуда $q = \frac{1}{2}$ и $p = \frac{1}{2}$, слѣдов. $x = \frac{10}{9}$, а изъ сего $x + 1 = \frac{19}{9} = (\frac{19}{9})^2$ и $xx + 1 = \frac{161}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Тамъ II.

Ю

Когда

Когда кто пожелаетъ сыскать большіе знаменованій вмѣсто q , то надлежитъ взять одно изъ найденныхъ напр. $-\frac{1}{2}$ и положить потомъ $q = -\frac{1}{2} + r$, но отсюда было бы $p = \frac{1}{2} + r$, $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ и $p^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^3$; по чему формула наша $\frac{25}{16} - \frac{5}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^3$, которая должна быть квадратъ, и слѣдов. умноженная на 16 также н. с. $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^3$, которой формулы возми

I. корень $5 + fr + 4rr$, такъ что $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^3 = 25 + 10fr + 40rr + 8fr^3 + 16r^3$; но понеже первые и послѣдніе члены здѣсь уничтожаются, то опредѣли f такъ, чтобъ и вторые члены уничтожились, что учинится положивъ $-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$; оста мныяже члены раздѣливъ на rr дадутъ $-8 + 32r = -40 + ff + 8fr$; удержавъ вер- хней знакъ будемъ $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, откуда $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$; но $f = -\frac{12}{5}$, то $r = \frac{21}{16}$, слѣдов. $p = \frac{9}{16}$ и $x = \frac{561}{256}$, а отсюда $xx + 1 = (\frac{619}{256})^2$ II,

II. Взявъ нижней знакъ будещъ $-8+32r$
 $= -40 + ff - 8fr$, и найдётся $r = \frac{ff-32}{32+8f}$,
 но $f = -\frac{1}{2}$, то $r = -\frac{11}{20}$, слѣдов. $p = \frac{11}{20}$, и
 отсюда прежде выходивъ уравненіе:

III. Пустьъ будещъ корень $4rr + 4r + \frac{5}{2}$,
 такъ что $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 +$
 $32r^3 + \frac{40rr}{2+16rr} + 40r + 25$, гдѣ два первые
 и послѣдній членъ уничтожаются, а
 остальные раздѣливъ на r дадутъ $-8r$
 $-24 = +40r + 16r + 40$, или $-24r - 24$
 $= +40r + 40$; взявъ верхній знакъ бу-
 дещъ $-24r - 24 = 40r + 40$ или, $0 = 64r + 64$,
 или $0 = r + 1$, т. е. $r = -1$ и $p = -\frac{1}{2}$, ко-
 торой случай уже мы имѣли, и тотъ
 же самой слѣдуетъ когда возмётся
 исподней знакъ.

IV. Положивъ корень $= 5 + fr + grr$ опре-
 дѣли буквы f и g , такъ чтобъ 3
 первые члена уничтожились. Понеже
 $25 - 24r - 8rr + 32r^2 + 16r^3 = 25 + 10fr$
 $+ 10grr + 2fr^2 + ggr^2$, то во первыхъ

$-24=10f$, слѣдов. $f=-\frac{12}{5}$; потомъ -8
 $=10g+ff$, по чему $g=-\frac{8ff}{10}$ или $g=-$
 $\frac{344}{315}=-\frac{172}{157}$; а оба послѣдніе члена раздѣ-
 ливъ на r^2 даютиъ $32+16r=2fg+gg^2$,
 откуда $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Зѣсь числитель
 $2fg-32=\frac{24 \cdot 172 \cdot 32 \cdot 625}{5 \cdot 125} = -\frac{32 \cdot 496}{625}$, или
 $-\frac{16 \cdot 32 \cdot 31}{625}$, а знаменатель $16-gg=-$
 $(4+g)(4-g)=\frac{328 \cdot 672}{155 \cdot 157}$, или $9 \frac{41 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 21}{25 \cdot 625} =$
 $\frac{8 \cdot 32 \cdot 41 \cdot 21}{25 \cdot 625}$; отсюда $r=-\frac{1550}{265}$ и $p=-\frac{2219}{1710}$; а
 изъ сего новое означеніе числа x
 найдется ш. е. $x=pp-1$.

1025.

Вопросъ. Къ даннымъ тремъ числамъ a ,
 b и c найти такое число x , которое
 ссплыи къ каждому изъ нихъ предло-
 жится, то произойдутъ квадраты,
 ш. с. си 3 формулы $x+a$, $x+b$ и
 $x+c$ надлежитъ зѣблать квадратами?
 Положи

Положи для первой $x + a = zz$, такъ что $x = zz - a$, то прочія формулы будутъ $zz + b - a$ и $zz + c - a$, изъ коихъ каждая должна быть квадратомъ; но сему общаго рѣшенія дать не лзя, потому что сіе часто бываше не возможно и зависяиъ единственно отъ свойства обоихъ чиселъ $b - a$ и $c - a$; ибо ежели бы наприм. было $b - a = 1$ и $c - a = -1$, т. е. $b = a + 1$ и $c = a - 1$, то должно бы обѣимъ формуламъ быть квадратами, а имено: $zz + 1$ и $zz - 1$, гдѣ всѣмъ сомнѣнія z долженствоваше быть дробь; чего ради положивъ $z = \frac{p}{q}$ были бы сіи формулы квадратами, а имено: $pp + qq$ и $pp - qq$, слѣдов. и ихъ произведеніе т. е. $p^2 - q^2$ также должно быть квадратомъ; но что сему статься не лзя, прежде сего уже показано.

Когда $b - a = 2$ и $c - a = -2$ то есть $b = a + 2$ и $c = a - 2$, то взявъ $z = \frac{p}{q}$ сіи двѣ формулы $pp + 2qq$ и $pp - 2qq$ должны бы быть квадратами слѣдов. и ихъ произведеніе $p^2 - 4q^2$ также, но сіе равнымъ образомъ невозможно.

Положи вообще $b+a=t$ и $c-a=n$,
 потомъ также $x=\frac{p}{q}$, то должны фор-
 мулы $pp+mq$ и $pp-nq$ быть квадратами;
 что, какъ мы уже видали не возможно,
 если $m=+1$, а $n=-1$, или когда $m=$
 $+2$, а $n=-2$.

Не возможно также, когда $m=ff$, а $n=ff$
 ибо было бы тогда произведение $p+fq$
 разность двухъ квадратовъ, которая
 никогда квадратовъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ если $m=2ff$, и
 $n=-2ff$, то обѣ формулы $pp+2ffq$ и
 $pp-2ffq$ не могутъ быть квадратами,
 потому что ихъ произведение $p-4f^2q$ такъ
 же должноствовало бы быть квадратомъ;
 слѣд. положивъ $fq=r$ сія формула $p-4r^2$
 чему невозможность прежде уже показана.

Когда же $m=1$ и $n=2$, такъ что форму-
 лы $pp+qq$ и $pp+2qq$ квадратами быть дол-
 жны, то положивъ $pp+qq=rr$ и $pp+2qq$
 $=ss$ будемъ изъ первой $pp=rr-qq$, слѣдов.
 другая $rr+qq=ss$, почему какъ $rr-qq$
 такъ и $rr+qq$ должны быть квадраты и
 ихъ

ихъ произведеіе также; однакожъ сему спастись нельзя. Отсюда довольно явствуетъ что не легко прибрать такіа числа вмѣсто m и n , чтобъ рѣшеніе было возможно.

Средство угадывать, или находить вмѣсто m и n надлежащія знаменованія, есть слѣдующее.

Положивъ $ff + mgg = bb$ и $ff + ngg = kk$, изъ первой получится $m = \frac{bb - ff}{gg}$,

а изъ второй $n = \frac{kk - ff}{gg}$, возьми теперь вмѣсто f, g, b и k числа по изволенію, и получатся для m и n такіа знаменованія, гдѣ рѣшеніе будетъ возможно.

Пусть на прим. $b=3$, $k=5$, $f=1$ и $g=2$, то будетъ $m=2$, а $n=6$. Теперь мы увѣрены, что возможно обѣ формулы $pp + 2qq$ и $pp - 6qq$ здѣлать квадратами: сіе учинится, когда $p=1$ и $q=2$. Первая формула будетъ квадратъ, ежели $p=rr-2ss$ и $q=2rs$: ибо тогда получится $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$,

Ю 4

другая

другая же формула $pp + 6qq = r^2 + 2orss + 4s^2$, гдѣ извѣстной случай, въ которомъ будетъ она квадратъ, есть когда $p=1$ и $q=2$, что учинится положивъ $r=1$ и $s=1$ или $r=s$ и формула наша выдетъ $25s^2$. Зная теперь сей случай возьмемъ $r=s+t$ и будетъ $rr = ss + 2st + tt$, а $r^2 = s^2 + 4st + 6ss + 4st + t^2$, почему наша формула будетъ $25s^2 + 44s^2t + 26sst + 4st^2 + t^2$, коея корень пусть будетъ $5s + fst + tt$, котораго квадратъ есть $25s^2 + 10fst + 1csst + 2fst^2 + t^2$, гдѣ пер-

выс и послѣдніе члены сами чрезъ себя уничтожаются. Возми теперь f такъ чтобъ и предпослѣдніе уничтожились, что здѣлается когда $4=2f$ и $f=2$, а остальные раздѣливъ на ss дадутъ уравненіе $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, или $2s = -t$, $s = -\frac{1}{2}$ и $t = -\frac{1}{2}$, почему $s = -1$ и $t = 2$, или $t = -2s$, слѣдов. $r = -s$ и $rr = ss$ самой извѣстной случай. Возми f такъ, чтобы вторые члены уничтожились: сіе здѣлается когда $44 = 10f$, или $f = \frac{22}{5}$, остальные же члены раздѣливъ на

ss дають $26s + 4t = 10s + ff + 2ft$ т. е.
 $-\frac{2}{3}s = \frac{2}{3}t$, слѣдов. $t = -\frac{2}{3}s$, и такъ $r - s + t$
 $= \frac{1}{3}s$, или $\frac{r}{s} = \frac{1}{3}$, почему $r = 3$ и $t = -2$;
 откуда получаемъ мы, $p = 2ss - tr = 191$
 и $q = 2rs = 60$, почему формула наша $pp + 2qq$
 $= 43681 = 209^2$ и $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

1026.

Примѣчаніе. Такихъ чиселъ, кото-
 рая формулу нашу дѣлають квадрапомъ
 по прежнему способу найти еще и боль-
 ше можно; но надлежитъ примѣчать,
 что содержаніе сихъ чиселъ m и n по
 произволению брать можно.

Пусть будемъ сіе содержаніе какъ $a : b$
 и возми $m = az$, а $n = bz$, то дѣло состо-
 итъ только въ томъ, какимъ образомъ
 опредѣлить z , чтобъ обѣ формулы pp
 $+ azqq$ и $pp + bzqq$ квадратами задѣлать
 можно было, что мы въ слѣдующемъ во-
 просѣ покажемъ.

1027.

Вопросъ Даны числа a и b , сы-
 скашь число z , чтобъ обѣ формулы pp
 $+ azqq$

Ю 5

$+azqq$ и $pp+bxqq$ были квадратами, и
припомѣ самую меншую взять знамено-
ванія для p и q

Положи $pp+azqq=rr$, $pp+bxqq=ss$
и помножѣ первую на b , а другую на
 a , по разность ихъ дася сѣ уравне-
ніе $(b-a)rp=brr-assy$, откуда $rp=\frac{brr-assy}{b-a}$,

которая формула должна быть квадратѣ,
что и учинится положивъ $r=s+\frac{x}{y}$, а для
избѣжанія дробей возьми $r=s+(b-a)t$ и
будетъ $rp=\frac{brr-assy}{b-a}=\frac{b^2s+2b(b-a)st+b(b-a)^2t^2}{b-a}$

$=\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2t^2}{b-a}=ss+$

$2bst+b(b-a)t^2$; положивъ $p=s+\frac{x}{y}t$ будетъ
 $pp=ss+\frac{2x}{y}st+\frac{x^2}{y^2}t^2$, гдѣ ss уничтожается,

а остальные члены раздѣливъ на t и по-
множивъ на yy дающъ $2bsyy+b(b-a)tyy$
 $=2sxy+txx$, откуда $t=\frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$, по-

чему $t=\frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}$, слѣдов. $t=2xy-2byy$

а $s=b(b-a)yy-xx$; попомѣ $r=2(b-a)xy$
- b

$=b(b-a)yy-xx$ и отсюда $p=s+\frac{x}{y}s=b(b-a)xy+xx-2bxy=(x-by)^2-abyy$. Нашедъ p , r и s осталось еще сыскать z ; на сей конецъ выпиши первое уравненіе $pp+azqq=rr$ изъ другаго $pp+bzqq=ss$, остатокъ будетъ $zqq(b-a)=ss-rr=(s+r)(s-r)$; но $s+r=2(b-a)xy-2xx$, $s-r=2b(b-a)yy-2(b-a)xy$; или $s+r=2x(b-a)y-x$ и $s-r=2by(b-a)y-(b-a)x=2(b-a)y(by-x)$; отсюда $(b-a)zqq=(2x(b-a)y-x)(2(b-a)y(by-x))$ или $zqq=(2x(b-a)y-x)(2y(by-x)=4xy(b-a)y-x)(by-x)$ слѣдов $z=\frac{4xy(b-a)y-x)(by-x)}{qq}$,

почему вмѣсто qq берется самой большой квадратъ, на котораго числитель можетъ раздѣлиться, а вмѣсто p нашли уже мы $p=b(b-a)xy+xx-2bxy=(x-by)^2-abyy$, откуда видно, что сии формулы будутъ простѣе когда возмется $x-by=v$, или $x=v+by$ и будетъ $p=vv-abyy$, а $z=\frac{4(v+by)y(v)(v+ay)}{qq}$

$=\frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}$, гдѣ числа v и y по

изволению взять можно и найдется сперва qq , когда вмѣсто его большой квадратъ возьмется, которой содержится въ числитель, а отсюда же найдется z , потомъ $m = az$, $n = bz$, и на концѣ $p = uv - abuu$; а отсюда получатся искомыя формулы.

- I. $pp + azqq = (uv - abuu)^2 + 4auv(u + av)(v + bu)$ квадратъ, косто корень если $r = -uv - 2auv - abuu$, а другая формула $pp + bzqq = uv - abuu)^2 + 4buv(u + av)(v + bu)$ которая также квадратъ, косто корень $s = -uv - 2buv - abuu$, гдѣ знаменныя чиселъ r и s положишпельныя также быть могутъ. Сие потребно изъяснить нѣкоторыми примѣрами.

1028.

Примѣръ. Пусть будишъ $a = -1$ и $b = +1$; найди такія числа вмѣсто z , чтобъ сии 2 формулы $pp - zqq$ и $pp + zqq$ могли быть квадратами, а именно первая $= rr$; а другая $= ss$?

Здѣсь

Здѣсь будемъ $p = rr + yy$, а чтобъ найти z , то надлежитъ рассмотреть формулу $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$ и взять вмѣсто v и y слѣдующія числа;

$v = 2$	---	3	4	5	---	16	8
$y = 1$	---	2	1	4	---	9	1
$v-y = 1$	---	1	3	1	---	7	7
$v+y = 3$	---	5	5	9	---	25	9
$zqq = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$	120	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14		
$qq = 4$	---	4	16	9.16	36.25.16	16.9	
$z = 6$	---	30	15	5	---	7	14
$p = 5$	---	13	17	41	---	337	65

откуда имѣемъ мы слѣдующія вмѣсто z знаменованія

I	II	III	IV	V	VI	почему слѣдующіе формулы могутъ разрѣшиться.
6	30	15	5	7	14	

I. формулы $rr - 6qq$ и $rr + 6qq$ могутъ быть квадратами, когда $p = 5$ и $q = 2$; ибо первая даетъ $25 - 24 = 1$, а другая $= 25 + 24 = 49$.

II. Также сѣи двѣ $pp-3qq$ и $pp+3qq$ будутъ квадратами, когда $p=13$ и $q=2$; ибо первая $=169-120=49$, а другая $=169+120=289=17^2$.

III. Слѣдующіе двѣ формулы $pp-15qq$ и $pp+15qq$ будутъ также квадратами, ежели $p=17$ и $q=4$; первая будетъ $=289-240=49$, а другая $=529=23^2$.

IV. Квадратами также могутъ быть сѣи двѣ формулы $pp-5qq$ и $pp+5qq$, что увидимся, когда $p=41$ и $q=12$; первая будетъ $=1681-720=961=31^2$, а другая $2401=49^2$.

V. Наконецъ формулы $pp-7qq$ и $pp+7qq$ будутъ квадратами, полагая $p=337$ и $q=120$; первая выйдетъ $=113569-100800=12769=113^2$, а другая $=113569+100800=214369=463^2$.

1029.

Примѣръ. Когда оба числа m и n содержатся между собою какъ 1:2; т. е. когда $a=1$ и $b=2$, слѣдов. $m=2$ и $n=22$, над-

надлежитъ сыскать знаменованіе вмѣ-
сто z , чтобъ сіи двѣ формулы $pp+zzq$
и $pp+2zqq$ были квадратами? Къ
сему всеобщей формулы употреблять
не нужно; но заравъ сей примѣръ съ
прежнимъ снесши можно; ибо поло-
живъ $pp+zzq=rr$ и $pp+2zqq=ss$, най-
дется изъ первой $pp=rr-zqq$, которую
величину вмѣсто pp поставивъ во вто-
рой будетъ $rr+zzq=ss$; то сіи фор-
мулы $rr-zqq$ и $rr+zzq$ сдѣлашь можно
квадратами, и есть случай прежняго
примѣра; по чему слѣдующія будутъ
вдѣсь вмѣсто z знаменованія: 6, 30, 15,
5, 7, 14, и проч.

Такое превращеніе и вообще сдѣ-
лать можно зная что 2 формулы $pp+mq$
и $pp+nqq$ квадратами быть могутъ. Взявъ
 $pp+mq=rr$ и $pp+nqq=ss$ первая дастъ
 $pp=rr-mqq$, слѣдов. вторая $rr-mqq+nqq=ss$
или $rr+(n-m)qq=ss$; слѣдовъ когда первая
возможна, то и сіи формулы $rr-mqq$ и
 $rr+(n-m)qq$ также возможны. Но понеже
 m и n можно намъ пересчитать, то и
сіи

Слѣ возможны $rr \sim pqq$ и $rr \vdash (m \sim n)qq$. Если-
ли же прежнія формулы не возможны,
то и слѣ такожде.

1030.

Примѣръ Пусть будутъ числа m и n
какъ $1 : 3$, или $a=1$, $b=3$; слѣдов.
 $m=z$ а $n=3z$, такъ что слѣ формулы
 $pp \vdash zqq$ и $pp \vdash \vdash zqq$ должны быть ква-
дратами.

Понеже здѣсь $a=1$, $b=3$, то за-
всегда дѣло будетъ возможное, когда
только $zqq=4vy(v+y)(v+3y)$ и $p=vv-3yy$,
чего ради возьми здѣсто v и y слѣдующія
знаменованія.

$v=1$	3 -	4 -	1 - -	16 - - -
$y=1$	2 -	1 -	8 - -	9 - - -
$v+y=2$	5 -	5 -	9 - -	25 - - -
$v+3y=4$	9 -	7 -	25 - -	43 - - -
$zqq=4.8$	$9.4.30$	$4.4.35$	$4.9.25.4.2$	$4.9.16.25.43$
$qq=4.4$	4.9	4.4	$4.4.9.25$	$4.9.16.25$
$z=2$	30	35	2 - - -	43 - - - -
$p=2$	3	13	191 - -	13 - - - -

Здѣсь

здѣсь имѣемъ мы 2 случая для $z=2$, почему двоякимъ образомъ формулы $pp+2qq$ и $pp+6qq$ квадратами здѣлать можемъ. Во первыхъ учинится сіе, когда $p=2$ и $q=4$, слѣдов. также, когда $p=1$, $q=2$, и найдется $pp+2qq=9$, а $pp+6qq=25$.

Пономъ бывася также сіе, когда $p=191$ и $q=60$: ибо тогда получится $pp+2qq=(209)^2$ и $pp+6qq=(241)^2$. Но не можнѣ ли также быть $z=1$? Сіе бы здѣлалось естѣлибѣ вмѣсто $2qq$ вышелъ квадратъ, что разрѣшить трудно. Естѣли же бы захотѣли разрѣшить сей вопросъ, могутъ ли двѣ формулы $zz+qq$ и $zz+3qq$ быть квадратами, или нѣтъ, то слѣдующимъ образомъ рѣшеніе разположить можно.

1031.

Надлежитъ разыскать, могутъ ли формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ быть квадратами, или нѣтъ. Положивъ $pp+qq=rr$, $pp+3qq=ss$ надлежитъ примѣчать слѣдующее.

Толѣ II.

Я

I

- I. Числа p и q можно взять неѣлимыми между собою : ибо сспыли бы они общаго ѣлишеля имѣли , то бы формулы оспались сщс квадратами , ежели бы p и q на онаго разѣлились.
- II. p четное число быть не можетъ : потому что q было бы нечетное и слѣдов. вторая формула была бы число сего рода $4n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Почему p неопѣнно нечетъ , а pp число сего рода $8n+1$.
- III. Когда p нечетъ , то изъ первой формулы q не только четное , но сщс и на 4 ѣлимо , дабы qq было число сего рода $16n$, а $pp+qq$ сего $8n+1$.
- IV. Также p на 3 не можетъ быть ѣлимо : ибо pp могло бы на 9 разѣлиться , а qq нѣтъ ; слѣдов. $3qq$ только на 3 , а не на 9 ; и такъ $pp+3qq$ только на 3 , а не на 9 , и для того квадратомъ быть не можетъ. По сему

сему число p на 3 недѣлимо, а pp будеть сего роду $3n+1$.

V. Когда p на 3 недѣлимо, то должно q дѣлиться на 3: ибо есѣ ли бы q на 3 было недѣлимо, то было бы qq число сего рода $3n+1$, и по сему $pp+qq$ сего $3n+2$, которое квадратомъ быть не можетъ; слѣд. q должно на 3 дѣлиться.

VI. Также p на 5 недѣлимо быть можетъ: ибо ежели бы сѣ такъ было, то бы q на 5 не дѣлилось, и qq число сего рода $5n+1$, или $5n+4$; слѣд. $3qq$ число сего рода $5n+3$ или $5n+2$, котораго рода было бы также $pp+3qq$, и слѣд. не могло бы быть квадратомъ, почему p неотмѣнно должно быть на 5 недѣлимо, а pp число сего рода $5n+1$, или $5n+4$.

VII. Ежели p на 5 недѣлимо, то посмотритъ, можетъ ли q раздѣлиться на 5, или нѣтъ. Есѣ ли бы q на 5 не дѣлилось, то бы qq было сего роду $5n+2$, или $5n+3$, какъ уже мы видѣли, и было бы тогда pp или, $5n$

$+1$, или $5n+4$, а $pp+3qq$, или $5n+1$, или $5n+4$, такъ какъ и pp . Пусть будетъ $pp=5n+1$, то надлежало бы быть $qq=5n+5$: ибо иначе $pp+qq$ не могло бы быть квадратомъ; но вышло бы $3qq=5n+2$, и $pp+3qq=5n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Когда же $pp=5n+4$, то должно бы $qq=5n+1$, и $3qq=5n+3$; слѣдов. $pp+3qq=5n+2$, что также квадратомъ не будетъ. Отсюда слѣдуетъ, что qq должно дѣлиться на 5.

VIII. Когда q на 4, потомъ на 3 и наконецъ на 5 дѣлиться должно, то надлежитъ быть число $4.3.5n$ или $q=60n$; по чему наша формула будетъ $pp+3600nt=rr$, и $pp+10800nt=ss$. Вычти первую изъ второй, и будетъ $7200nt=ss-rr=(s+r)(s-r)$, такъ что $s+r$ и $s-r$ должны быть множители числа $7200nt$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ s такъ и r должны быть нечетныя числа, и при томъ между собою неѣлимы.

IX. По сему пусть будетъ $72000n = 4fg$, коего множили $2f$ и $2g$ взявъ $5 + r = 2f$, а $s - r = 2g$ будетъ $r = f + g$, $r = f - g$, гдѣ f и g должны быть между собою не дѣлимы, одно четъ, а другое нечетъ; но понеже $fg = 1800n$, то $1800n$ надлежитъ раздробить на 2 множителя, изъ коихъ бы одинъ былъ четной, а другой нечетной, и при томъ не имѣли бы общаго дѣлителя.

X. Надлежитъ еще примѣчать, что ежели $rr = pp + qq$, и слѣдственно r дѣлитель числа $pp + qq$, то число $r = f - g$ также должно быть суммою двухъ квадратовъ; а понеже оно нечетъ, то въ формулѣ $4n + 1$ содержаться должноствуетъ.

XI. Взявъ $n = 1$ будетъ $fg = 1800 = 8.9.25$, откуда слѣдующія раздробленія выйдутъ: $f = 1800$ и $g = 1$, или $f = 200$, и $g = 9$, или $f = 72$, а $g = 25$, или $f = 225$, а $g = 8$. по первому будетъ $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; по второму $r = f - g = 191 = 4n + 3$; по третьему $r = f - g = 47 = 4n + 3$, и наконецъ по четвертому $r = f - g = 217 = 4n + 1$.

По чему 3 первые не годяпся, а остае-
тся только четвертое раздробленіе ;
откуда вообще заключить можно ,
что самой большой множитель нече-
тной , а меньшей четной быть дол-
жны. Но здѣсь также замечаніе
 $r=217$ вмѣсто мѣста не можетъ , по-
тому что сіе число на 7 дѣлится ,
которое не сумма двухъ квадратовъ.

XII. Положивъ $n=2$ будемъ $fg=7200=$
 32.225 ; взявъ $f=225$ и $g=32$, такъ
что $r=f-g=193$, которое число есть
сумма двухъ квадратовъ и достойно ,
чтобъ съ нимъ пробу здѣлать. Когда
 $q=120$ и $r=193$, то $pr=rr-qq=(r+q)$
 $(r-q)$, но $r+q=313$ и $r-q=73$, то
явствуетъ , что вмѣсто pr квадрата
не выйдетъ , потому что оба множи-
тели не квадраты.

Еслили бы кпо похотѣлъ взять
на себя сей трудъ и брать вмѣсто и
другія числа , то весь бы трудъ былъ
щепной; что мы показашь наобръны.

1032.

Теорема. Не возможно, чтобъ двѣ формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ были вдругъ квадратами; или въ такихъ случаяхъ, когда одна будетъ квадратъ, то другая заподлинно не квадратъ; что доказы-ваемъ мы такимъ образомъ.

Когда p нечетъ, а q четъ, какъ мы видѣли, то $pp+qq$ не иначе квадра-томъ быть можетъ, какъ только если $q=2rs$ и $p=rr-ss$; другая же $pp+3qq$ иначе квадратомъ не будетъ, какъ толь-ко если $q=2tu$, а $p=tt-3uu$, или $3uu-tt$. Понеже въ обоихъ случаяхъ q должно быть удвоенное произведеніе, то положи вмѣсто обоихъ $q=2abcd$, и возми для перваго $t=ab$ и $s=cd$, а для другаго $t=ac$ и $u=bd$. Въ первомъ случаѣ бу-детъ $p=aabb-ccdd$; а въ другомъ $p=aa-cc-3bbdd$, или также $3bbdd-aacc$, кото-рыя оба означенія одинаковы быть должны. И такъ получимъ мы, или $aabb-ccdd=aacc-3bbdd$, или $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$; при чемъ должно знать,

что числа a , b , c и d вообще меньше нежели p и q ; по чему надлежитъ намъ разсмотрѣть каждой изъ сихъ двухъ случаевъ особенно. Изъ перваго получимъ мы $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$, или $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, откуда $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, которая дробь должна быть квадратъ; но понеже здѣсь числитель и знаменатель инаго общаго дѣлителя кромѣ 2хъ имѣть не могутъ, потому что разность оныхъ есть $2dd$, и такъ ежели бы 2 было общимъ дѣлителемъ, то надлежало бы какъ $\frac{aa+dd}{2}$, такъ и $\frac{aa+3dd}{2}$ быть квадратами; но оба числа a и d въ семъ случаѣ нечетныя; слѣдов-ихъ квадраты надлежатъ до формулы $8n+1$, почему послѣдняя формула $\frac{aa+dd}{2}$ получитъ сей видъ $4n+2$, которой квадратомъ быть не можетъ: по чему 2 общимъ дѣлителемъ быть не можетъ; но числитель $aa+dd$, и знаменатель $aa+3dd$ между собою недѣлимы, слѣдовъ каждой долженъ быть квадратомъ: потому что сія формулы съ первыми сходны. Откуда

куда слѣдуетъ , что ежели бы первые были квадратами, то бы и въ меньшихъ числахъ такіе формулы квадратами были, и такимъ бы образомъ можно было приписать къ меньшимъ числамъ; но когда такихъ формулъ въ малыхъ числахъ нѣтъ, то и въ большихъ также не будетъ. Сіе слѣдствіе столь же справедливо, какъ и прежней второй случай $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ веденъ къ тому же. Но отсюда $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, или $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, почему $\frac{aa}{bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, которая дробь должна быть квадратъ; и симъ прежне доказательство подкрѣпляется: ибо если бы были такіе случаи въ большихъ числахъ, гдѣ $pp + qq$, и $pp + 3qq$ квадраты, то бы также и въ малыхъ числахъ оныя быть должныствовали, однакожъ невозможны.

1033.

Вопросъ. Найти 3 такіа числа x , y и z , изъ которыхъ ежели 2 между собою
А 5 помно-

помножатся и къ произведенію при-
дася 1, чтобъ вышли квадраты?

По чему сіи 3 формулы I) $xz+1$,
II) $xz+1$, III) $yz+1$ должны быть квад-
ратами.

Возьми для двухъ послѣднихъ $xz+1$
 $=pp$, $yz+1=qq$, и найдется $x=\frac{pp-1}{z}$,
а $y=\frac{qq-1}{z}$; почему первая формула бу-
детъ $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, которая должна
быть квадратъ и слѣдственно умножен-
ная на zz , т е сія $(pp-1)(qq-1)+zz$, ко-
пюрую легко квадратомъ изъяснить можно:
ибо положивъ корень ся $=z+r$ полу-
чится $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, откуда
 $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, гдѣ вмѣсто p , q и r
можно брать числа по изволенію.

Положивъ напр. $r=-pq-1$ будетъ
 $rr=ppqq+2pq+1$, и $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2p-2}$

$$\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}, \text{ слѣдов. } x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq} \\ = \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \text{ и } y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Ежели пожелаешь имѣть цѣлыя числа, то положи первую формулу $xy+1=pp$, и возьми $z=x+y+q$, будетъ 2-рая формула $xx+xy+xq+1=xx+xq+pp$, а третья $xy+yy+qy+1=yy+qy+pp$, кои очевидно будутъ квадратами, когда возьмется $q=\pm 2p$: ибо тогда вторая будетъ $xx\pm 2px+pp$, кою корень есть $x\pm p$; третья же будетъ $yy\pm 2py+pp$, кою корень $y\pm p$. Почему имѣемъ мы сіе изрядное рѣшеніе: $xy+1=pp$, или $xy=pp-1$. что для каждаго числа, которое за p берется, легко завлапсы можетъ; потомъ и третье число есть двояко, или $z=x+y+2p$, или $z=x+y-2p$, что мы слѣдующими примѣрами изъяснить намерены.

I. Взявъ $p=3$ будетъ $pp-1=8$; теперь положи $x=2$, $y=4$ и получится z ,
или

или $z=12$, или $z=0$, слѣдов. 3 иско-
мые числа суть 2, 4 и 12.

II. Пусть $p=4$ будетъ $pp-1=15$; взявъ
 $x=3$ и $y=5$ будетъ $z=16$, или
 $z=0$; почему 3 искомыя числа суть
3, 5 и 16.

III. Пусть $p=5$ будетъ $pp-1=24$ и
положимъ $x=3, y=8$ найдемъ $z=21$,
или также $z=1$, откуда слѣдующія
выходятъ числа 1, 3 и 8; или 3, 8
и 21.

1034.

Вопросъ. Сыскать 3 такія цѣлыя числа
 x, y и z , что ежели къ произведенію
изъ каждаго двухъ приласится данное
число a , тобъ произошеть квадратъ?

Слѣдов. сіи 3 формулы должны
быть квадратами: I) $xy+a$, II) $xz+a$,
III) $yz+a$. Пославъ за первую $xy+a=pp$,
и возмемъ $z=x+y+q$, то въпоря $xx+$
 $xy+xq+a=xx+xy+xq+pp$; а третья $xy+$
 $+yq+qy+a=yq+qy+pp$, кои обѣ бу-
дутъ квадратами, когда $q=\pm 2p$ такъ,
что

что $z = x + y + 2r$, и отсюда двѣ величины для z найти можно.

1035.

Вопросъ. Требуются 4 цѣлыя числа x , y , z и v , такъ что если къ произведенію нѣбъ каждаго двухъ придастся данное число a , то бы каждой разъ вышелъ квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ надлежитъ избѣлать квадратами: I) $xy + a$; II) $xz + a$; III) $yz + a$; IV) $xv + a$; V) $yv + a$, VI) $zv + a$. Пославъ за первую $xy + a = rr$, и возми $z = x + y + 2r$, то будетъ 2-рая и 3-ья формула квадратами. Потомъ возми $v = x + y - 2r$ будетъ 4-тая и 5-тая формула квадратами, слѣдоват. осталась только 6-тая, которая будетъ $xx + 2xy + yy - 4rr + a$, и которая также должна быть квадратомъ. Понеже $rr = xy + a$, то будетъ послѣдняя формула $xx + 2xy + yy - 3a$. И такъ сіи двѣ формулы квадратами еще избѣлать надлежитъ: I) $xy + a = rr$; II) $(x - y)^2 - 3a$: корень послѣдней пусть будетъ $(x - y)$

$-q$, и получится $(x-y)^2 - 3a = (x-y)^2 - 2q(x-y) + qq$ откуда $-3a = -2q(x-y) + qq$; по-
тому $x-y = \frac{qq+3a}{2q}$, или $x = y + \frac{qq+3a}{2q}$,

слѣдов. $pp = yy + \frac{qq+3a}{2q}y + a$. Возьми $p = y$

$+r$, и будемъ $2ry + rr = \frac{qq+3a}{2q}y + a$, или

$4qry + 2qrr = (qq+3a)y + 2aq$, или $2qrr - 2aq = (qq+3a)y - 4qry$, и $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq+3a-4qr}$, гдѣ q

и r по изволѣнію взять можно, и дѣло со-
стоитъ только въ томъ, чѣмъ вмѣ-
сто x и y цѣлыя вышлі числа. Когда
 $p = r + r$, то z и r будемъ также цѣ-
лыя, и главное дѣло зависѣтъ здѣсь отъ
свойства даннаго числа a , гдѣ затруд-
неніе для цѣлыхъ чиселъ быть можѣтъ;
но надѣвши примѣчать, что сіе рѣ-
шеніе счрѣзъ по весьма ограничено: ибо
когда буквамъ x и y знаменованія даны
 $x+y = \pm 2p$, хотя бы они и могли имѣть
другія знаменованія. На сей конецъ
хотѣмъ мы надъ симъ вопросомъ учи-
нимъ слѣдующее разсужденіе, которое

и въ другихъ случаяхъ свою пользу имѣть можеть.

I. Если $xu + a$ должно быть квадратъ, и слѣд. $xu = rr - a$, то числа x и y всегда въ подобной формулѣ $rr - ass$ содержащяся; и такъ положивъ $x = bb - ass$ и $y = dd - aee$ будетъ $xu = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Еслили перемѣнить $be - cd = +1$, то $xu = (bd - ace)^2$; по чему $xu + a = (bd - ace)^2$

II. Положимъ еще $x = ff - agg$, и возьмемъ числа f и g такого состоянія, чтобъ $bg - cf = +1$, также $dg - ef = +1$, то формулы $xz + a$ и $yz + a$ будутъ квадратами, и дѣло состоятъ въ нахожденіи такихъ вѣсто b и c , d и e также f и g чиселъ, чтобъ предписанное свойство исполнилось.

III. Сія 3 пары буквъ хотимъ мы представить дробями яко $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, которые такого свойства быть должны, чтобъ разность между каждою парою изъявить можно было одною дробью, коей числитель 1: ибо
когда

когда $\frac{b}{e} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{e^2}$, гдѣ числитель, какъ мы видѣли, долженъ быть ± 1 . Здѣсь можно взять одну изъ сихъ дробей по изволенію, а къ ней легко найсти другую, которая бы помянутое свойство имѣла. Пусть будетъ на прим. первая $\frac{b}{e} = \frac{3}{2}$, то другая $\frac{d}{e}$ сей почини должна быть равна; пусть $\frac{d}{e} = \frac{1}{2}$, то разность будетъ $= \frac{1}{2}$. Сно вторую дробь можно также вообще опредѣлить изъ первой; ибо когда $\frac{b}{e} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, то надлежитъ быть $3e - 2d = 1$, слѣдов: $2d = 3e - 1$ и $d = e + \frac{e-1}{2}$, что ради возмемъ $\frac{e-1}{2} = m$, или $e = 2m + 1$ и получимся $d = 3m + 1$, а наша вторая дробь будетъ $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Равнымъ образомъ къ каждой первой дроби можно сыскать другую, чему слѣдующіе прилагаемъ примѣры:

$$\frac{b}{e} = \frac{5}{7}$$

$\frac{b}{c} = \frac{7}{2}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3 \cdot 171 + 4}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{571}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{771}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{871}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{1 \cdot 171 + 3}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{1 \cdot 171 + 3}{2 \cdot 61 + 1}$	$\frac{1 \cdot 171 + 3}{2 \cdot 61 + 1}$

IV. Нашедъ двѣ такіе дроби $\frac{b}{c}$ и $\frac{d}{e}$ легко къ нимъ сыскать третью $\frac{f}{g}$, которая съ двумя прежними въ равномъ отношеніи содержаніи: ибо надлежитъ только взять $f = b + d$ и $g = c + e$ такъ что $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$ и изъ первыхъ двухъ $be - cd = \pm 1$ будетъ $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{ce + ce}$, подобнымъ образомъ претя съвѣшп-рой $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{ce + ce} = \frac{\pm 1}{ce + ce}$

V. Когда же найдены 3 такіе дроби $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, то можно вразѣ рѣшить нашъ вопросъ для 3 хъ чиселъ x, y, z , такъ что 3 формулы $xu + a$, $xz + a$ и $yz + a$ будутъ квадратами; ибо надлежитъ только взять $x = pp - acc$, $y = dd - ace$ и $z = ff - agg$. Возьми наприм. изъ прежней таблички $\frac{b}{c} = \frac{7}{2}$ и $\frac{d}{e} = \frac{3}{2}$, будетъ $\frac{f}{g} = \frac{17}{5}$, слѣд. $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$, $z = 144 - 49a$,
 Гдѣ II. и полу-

и получи $xu+a=1225\ 840a+144aa=(35-12a)^2$
 потомъ $xz+a=3600-2520a+441aa=(60-21a)^2$
 и $yz+a=7056-4704a+784aa=(84-28a)^2$.

1036.

Когда же по силѣ вопроса надлежитъ найти 4 такіа числа x, y, z и v , то должно къ первымъ тремъ дробямъ присовокупить еще четвертую, и по сему пусть будутъ 3 первые $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$; возьми четвертую дробь $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+e}$ такъ чтобъ она со второю и третьею въ надлежащемъ была содержаніи. Ежели теперь возмешь $x=bb-acc, y=dd-aee, z=ff-agg$ и $v=hh-akk$, то слѣдующіе обстоятельства исполнятся: I) $xu+a=\square$, II) $xz+a=\square$; III) $yz+a=\square$, IV) $yv+a=\square$; V) $xv+a=\square$, и такъ осталось еще, чтобъ $xv+a$ было также квадратное число, которое само собою не сдѣлается, потому что первая дробь съ четвертою не стоявъ въ надлежащемъ содержаніи и для того въ первыхъ трехъ дробяхъ

дробяхъ надлежитъ удержать неопредѣ-
ленное число m , и оное опредѣлить
такъ, чтобы $xv + a$ было также квадратъ.

VI. Взявъ изъ прежней таблички первой

случай положи $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$ и

будетъ $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$, а $\frac{b}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$,

отсюда $x = 9 - 4a$ и $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$
слѣдов. $xv + a = 9(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2$
 $+ 4aa(4m+4)^2$; $- 4a(6m+5)^2$
 $+ a$

или $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288mm + 528m$
 $+ 243) + 4aa(4m+4)^2$, что легко квадра-
томъ слѣдуетъ можно: потому что mm
помноженъ на квадратъ, но мы при-
демъ медлить не будемъ.

VII. Можно также сіи дроби, какіе здѣсь
потребны, изъяснить вообще. Пусть

будетъ $\frac{b}{c} = \frac{1}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n}$, то $\frac{f}{g} =$

$\frac{nI+I-1}{n+1}$ и $\frac{b}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1}$; поставь

въ послѣдней вмѣсто $2n+1 = m$, бу-

деть она $\frac{Im-2}{m}$, а изъ первой $x = II - a$, изъ послѣдней $v = Im - 2 - am$ и осталось только чтобъ $2v + a$ квадратомъ было. Понеже $v = (II - a)mm - 4Im + 4$, слѣдов $2v + a = (II - a)^2 mm - 4(II - a)Im + 4II - 3a$, что должно быть квадратомъ, коста корень положи $(II - a)m - p$, сего квадратъ $(II - a)^2 mm - 2(II - a)mp + pp$, откуда получаемъ мы $-4(II - a)Im + 4II - 3a = -2(II - a)mp + pp$ и $m = \frac{pp - 4II + 3a}{(II - a)(2p - 4I)}$; взявъ $p = 2I + q$ будетъ $m = \frac{4Iq - qq + 3a}{2q(II - a)}$, гдѣ вмѣсто I и q произволящія брать можно числа.

Если бы наприм. было $a = 1$, то возьми $I = 2$, и будетъ $m = \frac{4q + qq + 3}{6q}$, положивъ $q = 1$ получится $m = \frac{7}{6}$; и $m = 2n + 1$; но здѣсь мы медлить не будемъ, а приступимъ къ слѣдующему вопросу.

1037.

Вопросъ. Требуется такія 3 числа x, y и z , чтобы какъ сумма, такъ и разность каждаго двухъ была квадратъ?

По сему слѣдующія 6 Формулъ должны быть квадратами: I) $x+y$; II) $x+z$; III) $y+z$; IV) $x-y$; V) $x-z$; VI) $y-z$.

Начни съ послѣднихъ трехъ и положи $x-y=pp$, $x-z=qq$ и $y-z=rr$, то изъ послѣднихъ двухъ получимъ $x=qq+z$, а $y=rr+z$, откуда $x-y=qq-rr=pp$, или $qq=pp+rr$, такъ что сумма квадратовъ $pp+rr$ должна быть квадратъ, а именно qq ; что учинился взявъ $p=2ab$ и $r=aa-bb$: ибо тогда $q=aa+bb$, но мы здѣсь оставимъ буквы p, q и r , и рассмотримъ три первыя формулы найдемъ во первыхъ $x+y=qq+rr+2z$; во вторыхъ $x+z=qq+2z$; въ третьихъ $y+z=rr+2z$. Положи за первую $qq+rr+2z=tt$, то $2z=tt-qq-rr$; потомъ сїи двѣ формулы квадратами дѣлашь надлежитъ: $tt-rr=\square$ и $tt-qq=\square$, т. е. $tt-(aa+bb)^2=\square$ и $tt-(aa-bb)^2=\square$, которые получаютъ такой видъ $tt-a^2-b^2-2aabb$ и $tt-a^2-b^2+2aabb$;

но понеже какъ $cc + dd + 2cd$, такъ и $cc + dd - 2cd$ суть квадраты, то видно, что наше намѣреніе исполнится, когда мы $u - a^* - b^*$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$ уравнимъ; а для произведенія сего въ дѣйство положимъ $cd = aabb = ffggbbbb$ и возьмемъ $c = ffgg$, $d = bbbb$, $aa = ffbh$ и $bb = ggkk$, или $a = fb$ и $b = gk$, по чему первое уравненіе $u - a^* - b^* = cc + dd$ получимъ такой видъ $u - f^*b^* - g^*k^* = f^*g^* + b^*k^*$, слѣдов. $u = f^*g^* + f^*b^* + b^*k^* + g^*k^*$, т. е. $u = (f^* + k^*)(g^* + b^*)$. Сіе произведеніе должно быть квадратъ, которой разрѣшивъ трудно: для того возьмемъ другой способъ и изъ трехъ первыхъ уравненій $x - y = pp$, $x - z = qq$ и $y - z = rr$ опредѣлимъ y и z , которыя будутъ $y = x - pp$, а $z = x - qq$, такъ что $qq = pp + rr$. Первые формулы выдутъ $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$ и $y + z = 2x - pp - qq$. Вмеѣсто сей послѣдней положи $2x - pp - qq = u$, такъ что $2x = u + pp + qq$, и останется только формулы $u + qq$ и $u + pp$ сдѣлать квадратами. Но должно быть $qq = pp + rr$, то возми

$q = a$

$q=aa+bb$ и $p=aa-bb$, будетъ $r=2ab$; по чему наши формулы будутъ

$$I) tt + (aa+bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = 0$$

$$II) tt + (aa-bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = 0.$$

Уравнимъ теперь опять $tt+a^4+b^4$ съ $cc+dd$ и $2aabb$ съ $2cd$, то намѣрене наше исполнится. Положивъ какъ и прежде $c=ffg$, $d=hbk$, $a=fh$ и $b=gk$ будетъ $cd=aabb$ и надлежитъ еще быть $tt+f^4b^4+g^4k^4=cc+dd=f^4g^4+b^4k^4$; отсюда слѣдуетъ $tt=f^4g^4-f^4b^4+b^4k^4-g^4k^4=(f^4-k^4)(g^4-b^4)$, и все дѣло состоятъ въ нахожденіи двухъ такихъ разностей между двумя биквадратами, какъ f^4-k^4 и g^4-b^4 , которые бы помноживъ одну на другую произвели квадратъ.

На сей конецъ рассмотримъ формулу m^4-n^4 и поглядимъ какія отсюда выйдутъ числа, ежели вмѣсто m и n возьмуться данныя числа, и сверхъ сего особливо примемъ въ разсужденіе квадраты въ нихъ содержащіеся. Понеже $m^4-n^4=(mm+nn)(mm-nn)$, то слѣдуетъ отсюда слѣдующую таблицу.

ता. ८. ५. ११. ३

[illegible]

Изъ сего уже можемъ мы дать нѣкоторыя рѣшенія , а именно : взявъ $ff=9$ и $kk=4$ будемъ $f^2-k^2=13.5$; потомъ $gg=81$ и $bb=49$, получимся $g^2-b^2=64.5.13$, откуда $h=64.25.169$, слѣдов. $i=520$; но когда $h=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$ и $b=7$, то получимся $a=21$ и $b=18$; откуда $p=117$, $q=765$ и $r=756$; а изъ сего найдется $x=11$; $pp+qq=869314$, слѣдов. $x=434657$, потомъ $y=x-pr=420968$, и наконецъ $z=x-qq=-150568$, которое число можно взять положительнымъ : потому что сумма въ разность обратно переменяется ; и такъ наши искомыя числа суть слѣдующія :

$$x = 434657$$

$$y = 420968$$

$$z = 150568$$

$$\text{чего ради } x+y = 855625 = (925)^2$$

$$x+z = 585225 = (765)^2$$

$$y+z = 571536 = (756)^2$$

$$\text{потомъ } x-y = 13689 = (117)^2$$

$$x-z = 284089 = (533)^2$$

$$y-z = 270400 = (520)^2$$

Другія еще числа найдемъ отъ прежней таблички. Такъ когда положимъ $ff=9, kk=4, gg=121$ и $bb=4$, то будемъ $ii=13.5.13.9.25=9.25.25.169$, такъ что $i=3.5.13=975$; а понеже $f=3, g=11, k=2$ и $b=2$, то найдемъ $a=fb=6$ и $b=ggk=22$; отсюда $p=aa-bb=-448$ и $q=aa+bb=520$, а $r=264$. Чего ради получимъ $2x=ii+pp+qq=950625+200704+270400=1421729$, слѣдоват. $x=\frac{1421729}{2}$; отсюда $y=x-pp=\frac{10^{\cdot}0223}{2}$ и $z=x-qq=880929$. Теперь надлежитъ примѣчать, что если сѣ числа желаемое свойство имѣютъ, то оныя будучи помножены на каждой

квад-

квадратъ, должны удержатъ сіе свойство; и такъ взявъ найденныя числа четырежды, слѣдующія 3 числа удовлетворяютъ : $x=2843458$; $y=2040642$ и $z=1761858$, кои больше нежели предъидущія , такъ что тѣ за самыя меньшія возможные почтятся могутъ.

1038.

Вопросъ. Требуется 3 квадратныя числа, чинъбъ разность между двумя каждами была квадратъ? Прежнее рѣшеніе служило такъ же и къ сему вопросу; ибо когда x , y и z такія суть числа, что сіи формулы будутъ квадратами : I) $x+y$; II) $x-y$; III) $x+z$; IV) $x-z$; V) $y+z$; VI) $y-z$; то произведеніе изъ первой и второй $xx-yy$ такъ же квадратъ. Равнымъ образомъ произведеніе изъ третьей и четвертой $xx-zz$, и наконецъ изъ пятой и шестой $yy-zz$ будутъ такъ же квадратами слѣдов. 3 искомыя здѣсь квадрата будутъ xx , yy и zz ; но понеже сіи числа будутъ очень велики , то безъ сомнѣнія такъ же есть гораздо меньшія : потому что для сдѣланія $xx-yy$ квадратомъ не нужно, чинъбъ

чтобъ $x+y$ и $x-y$ каждое особливо было квадратъ, затѣмъ чю $25-9$ естъ квадратъ хотя $5+3$, ниже $5-3$ не квадраты. Сего ради хотимъ мы рѣшить сей вопроу особливо, и притомъ во первыхъ примѣчать, что вмѣсто одного квадрата можно взять 1 цу. Когда $xx-yu$, $xx-zz$ и $yu-zz$ квадраты, то будуще они также квадратами ежели на zz раздѣляяся; и по сему надлежитъ сдѣлать квадратами сѣ формулы:

сѣ формулы: $\frac{xx}{zz} - \frac{yu}{zz} = \square$; $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$ и $\frac{yu}{zz} - 1 = \square$. Все дѣло состояще въ сихъ двухъ

дровяхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$; взявъ $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$,

послѣднія два обстоятельства исполняюща в будетъ $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ а $\frac{yu}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$.

Теперь осталось только первую формулу сдѣлать квадратомъ, которая естъ $\frac{xx}{zz} - \frac{yu}{zz} =$

$$\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1} \right) \left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1} \right).$$

Первой множитель будетъ

дствъ адѢсь $\frac{2(ffqq-1)}{(pp-1).qq-1}$; а другой $= 2$

$\frac{(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, коихъ произведение $= \frac{4ppqq-1}{(pp-1)^2}$

$\frac{(qq-pp)}{(qq-1)^2}$ Понеже знаменатель уже ква-

дратъ и числитель помноженъ на ква-

дратъ 4, то надлежитъ только сдѣлать

квадратомъ сию формулу $(ppqq-1)(qq-pp)$,

или также сию $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$, что учи-

нится, когда возмется $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ и $\frac{q}{p} =$

$\frac{bb+kk}{2bk}$, а понеже тогда каждой множи-

тель будетъ квадратъ $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{bb+kk}{2bk}$, то

си обѣ дроби помноживъ одну на другую

должны произвести квадратъ, и слѣдовате-

льно также ежели онѣ помножатся на $4ff$

$ggbbkk$ т. е. $fg(ff+gg)bk(bb+kk)$, которыя

формулы съ прежними во всемъ сходны.

Положивъ $f=a+b$, $g=a-b$, $b=c+d$ и k

$=c-d$ выдетъ $2(a^2-b^2) \cdot 2(c^2-d^2) = 4(a^2-b^2)(c^2-d^2)$,

что учинится, какъ мы выѣли, ежели

$aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ и $dd=49$; или $a=$

3 , $b=2$, $c=9$ и $d=7$; откуда $f=5$, $g=1$,

$b=16$

$b=16$ и $k=2$; по чему $pq=\frac{11}{2}$ и $\frac{q}{p}=\frac{260}{81}=\frac{65}{18}$

Сии два уравненія помноживъ между собою даюмъ $qq=\frac{65 \cdot 11}{18 \cdot 2}=\frac{12 \cdot 11}{16}$, слѣдов. $q=\frac{11}{4}$, и по сему $p=\frac{1}{2}$; отсюда $\frac{x}{z}=\frac{2p+1}{p-1}=-\frac{4}{3}$ и $\frac{y}{z}=\frac{2q+1}{q-1}=\frac{15}{5}$; но $x=-\frac{4}{3}z$, по для нахожденія цѣлыхъ чиселъ, возми $z=153$, будетъ $x=-697$ и $y=185$, слѣд. 3 искомыя квадратныя числа будутъ слѣдующія:
 $ax=485809$ будетъ $xx-yy=451584=(672)^2$
 $yy=34225$ $yy-zz=10816=(104)^2$
 $zz=23409$ $xx-zz=462400=(680)^2$
 которые квадраты гораздо меньше, нежели какіе бы вышли, если бы взяли квадраты 3 хъ чиселъ x , y и z изъ прежняго вопроса.

1039.

Скажетъ нѣкто, что сіе рѣшеніе одною только пробою сыскано: ибо мы брали въ помощь прежнюю табличку; но мы сіе средство для того только упоиребляли, чтобъ самое меньшее рѣшеніе найти. А ежели на то не смоирѣшь, то помощію предписанныхъ правилъ безконечное множество рѣшеній найти можно;

а именно когда въ послѣднемъ вопросѣ ,
главное дѣло состоящъ въ томъ, чѣмъ
произведеніе $(ppqq-1)_{pp-1}^{pp-1}$ было квадратъ.
Понсеже тогда $\frac{x}{z} = \frac{p+1}{p-1}$ и $\frac{y}{z} = \frac{q+1}{q-1}$, по взявъ
 $\frac{q}{p} = t$, или $q = tp$ формула наша буди
 $(mtp^2-1)(mt-1)$, которая очевидно за-
дается квадратомъ, когда $p=1$ и съ
знаменованіемъ приведемъ насъ къ другимъ,
еслии положимъ $p=1+s$; ибо тогда
формула $(mt-1)(mt-1+4mt+6mts+4mt^2+4mt^3+mt^4)$, слѣд. раздѣливъ на квадратъ
 $(mt-1)^2$ выдемъ $1+4\frac{ts}{m-1}+6\frac{mts}{m-1}+\frac{4mt^2s^2}{m-1}+\frac{4mt^3s}{m-1}+\frac{mt^4}{m-1}$. Взявъ ради краткости $\frac{mts}{m-1} = a$;
чѣмъ формула $1+4a+6as+4as^2+as^3$
была квадратъ.

Положи ся корень $1+fs+gss$, ко-
его квадратъ есть $1+2fs+2gss+ffss$
 $+2fgs^2+ggs^3$ и опредѣли f и g такъ,
чѣмъ первые 3 члена уничтожились; что
здѣлается, когда $4a=2f$, или $f=2a$, а
 $6a=2g+ff$, слѣд. $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$; ос-
таточные же два члена дадутъ съ урав-
неніемъ $4a+as=2fg+ggs$, откуда найдется
ся

ся $s = \frac{4a - 2fg}{fg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^2}{4a^3 - 12a^2 + 9a - 1}$ т. е. $s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1}$, которую дробь раздѣливъ на $a - 1$ получится $s = \frac{4(2a - 1)}{4aa - 8a + 1}$.

Сие знаменованіе дастъ намъ бесконечно много рѣшеній, потому что число m , изъ котораго произходитъ $a = \frac{mm}{mm - 1}$ по изволѣнію взять можно, что мы изъяснить примѣрами наобротъ.

I. Пусть $m = 2$, будетъ $a = \frac{4}{3}$; почему $s = 4 \cdot \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{25}{9}} = -\frac{60}{25}$, откуда $p = -\frac{17}{25}$ и $q = -\frac{76}{25}$; наконецъ $\frac{x}{z} = \frac{949}{425}$ и $\frac{y}{z} = \frac{6005}{425}$.

II. Пусть $m = \frac{3}{2}$ будетъ $a = \frac{9}{5}$ и $s = 4 \cdot \frac{\frac{9}{5}}{-\frac{17}{25}} = -\frac{60}{17}$, слѣдов. $p = -\frac{110}{17}$ и $q = \frac{747}{17}$, откуда найдутся дроби $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

Одинъ особливо случай достоинъ примѣчанія, когда a будетъ квадратъ; что учинится если $m = \frac{5}{2}$, ибо тогда $a = \frac{25}{4}$;
положимъ

положи ради краткости $a = bb$ такъ что наша формула будетъ $1 + 4bbs + 6bbbs + 4bbs^2 + bbs^3$, коей корень пусть будетъ $1 + 2bbs + bss$, котораго квадратъ есть $1 + 4bbs + 2bss + 4b^2ss + 4b^2s^2 + bbs^3$, гдѣ два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на ss дають $6bb + 4bbs = 2b + 4b^2 + 4b^2s$, откуда

$$s = \frac{6bb - 2b - 4b^2}{4b^2 - 4bb} = \frac{3bb - b - 2b^2}{2b^2 - 2bb} = \frac{3b - 1 - 2b^2}{2bb - 2b},$$

которая дробь еще на $b - 1$ раздѣлится и выйдетъ $s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}$ и $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$. Мо-

жно бы было корень прежней формулы положить $1 + 2bs + bss$, коего квадратъ $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^2 + bbs^3$, гдѣ первый и два послѣдніе члена уничтожаются; а остальные раздѣливъ на s дають $4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs$, откуда $s = -2$ и $p = -1$, слѣдоват. $pp - 1 = 0$; но изъ сего ничего не найдется: ибо былъ бы $x = 0$. Въ прежнемъ случаѣ, гдѣ $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, ежели $m = \frac{1}{2}$, то $a = \frac{25}{16} = bb$ и $b = \frac{5}{4}$.

Томъ II.

У

опку-

откуда выдѣлѣмъ $p = \frac{17}{20}$ и $q = \frac{17}{11}$, а изъ
сего $\frac{x}{2} = \frac{649}{1111}$, и $\frac{y}{x} = \frac{437}{145}$.

1040.

Вопросъ. Найти 3 квадрата xx , yy и zz ,
коихъ бы сумма каждаго двухъ была
паки квадратъ?

Поневже сии 3 формулы $xx + yy$, $xx + zz$ и $yy + zz$ должны быть квадратами, то раздѣливъ оныя на zz получаются слѣдующіе 3 квадрата: I) $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square$; II) $\frac{xx}{zz} + 1 = \square$; III) $\frac{yy}{zz} + 1 = \square$. Двѣ послѣдніе

формулы разрѣшатся, когда возмемъ $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$, по чему первая будетъ $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, которую помноживъ на 4 надлежитъ вынести квадрату т. е. $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$, или помноживъ такожде на $ppqq$ будетъ

будетъ $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = 0$, что иначе учинившись не можеть прежде нежели не будетъ извѣстенъ случай, въ которомъ сѣ формула квадратъ; но такой случай не скоро отгадать можно, чего ради къ другимъ прѣсмамъ прибѣгнуть надлежитъ, изъ коихъ нѣкоторые мы здѣсь покажемъ.

I. Понеже реченную формулу изъяснить можно такъ: $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = 0$, то здѣлай чтобъ сѣ на квадратъ $(p-1)^2$ раздѣлить можно было, полагая $q-1 = p+1$, или $q = p+2$, будетъ $q+1 = p+3$, слѣдов. наша формула $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = 0$, которую раздѣливъ на $(p+1)^2$ долженъ выйти квадратъ, а именно $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, которой изъясняется въ сѣй формулѣ $2p^2 + 8p^2 + 6pp - 4p + 4$. Понсже здѣсь послѣдней членъ квадратъ, то положи корень $2 + fp + gpp$, или $gpp + fp + 2$, котораго квадратъ ссѣтъ $g^2p^2 + 2fgp^2 + 4gfp + f^2pp + 4fp + 4$, гдѣ f и g такъ

должно опредѣлить чтобъ 3 послѣд-
ніе члена уничтожились; что учини-
ся, когда $-4=4f$, или $f=-1$, а $6=$
 $4g+1$, или $g=\frac{5}{4}$; и тогда два первые
члена раздѣливъ на p^2 дающъ $2p+8$
 $=\frac{5}{4}p+2fg=\frac{7}{4}p-\frac{5}{4}$, откуда $p=-24$,
 $q=-22$, а изъ сего найдемъ $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}$
 $=-\frac{575}{48}$, или $x=-\frac{575}{48}z$, и $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{441}{22}$, или
 $y=-\frac{441}{22}z$.

Взявъ $z=16.3.11$ будетъ $x=575.11$,
а $y=483.12$, по чему 3 хъ искомымъ ква-
дратовъ корни будутъ слѣдующіе.

$$\begin{array}{ll} x=575 \cdot 11=6325 & \text{откуда } 2x+yy=2x^2(=75^2+11^2)=22^2 \cdot 371^2 \\ y=483 \cdot 12=5796 & 2x+2y=11^2(575^2+441^2)=11^2 \cdot 577^2 \\ z=528=2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 8 & yy+2z=12^2(483^2+44^2)=12^2 \cdot 445^2 \end{array}$$

II. Бесконечно многими способами можно
сѣю формулу раздѣлить на квадраты;
положивъ наприм. $(q+1)^2=4(p+1)^2$, или
 $q+1=2(p+1)$ т. е. $q=2p+1$ и $q-1$
 $=2p$, наша формула будетъ $(2p+1)^2$
 $(p+1)^2(p-1)^2+pp \cdot 4(p+1)^2+pp=\square$, раздѣ-
ливъ на $(p+1)^2$ получимъ $(2p+1)^2(p-1)^2$
+ 16

$+16p^2 = 0$, или $20p^2 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = 0$, но отсюда ничего найти нельзя.

III. Взявъ $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, или $q-1 = 2(p+1)$ будемъ $q = 2p+3$ и $q+1 = 2p+4$, или $q+1 = 2(p+2)$, по чему формулу нашу раздѣливъ на $(p+1)^2$ получится $(2p+3)(p-1)^2 + 16pp(p+2)^2$ т. е. $9-6p + 53pp + 68p^2 + 20p^3$; сей формулы положимъ корень $= 3-p+gpp$, котораго квадратъ есть $9-6p+6gpp+pp-2gp^2+g^2pp^2$; для уничтоженія 3 членовъ возми $53=6g+1$ будемъ $g=\frac{46}{2}$; а оставшіеся члены раздѣливъ на p^2 дадутъ $20p+68=6gp-2g=\frac{46}{2}p-\frac{46}{2}$, или $\frac{46}{2}p=\frac{46}{2}$, по чему $p=\frac{1}{1}$ и $q=\frac{46}{2}$, откуда пакъ рѣшеніе слѣдуетъ.

IV. Положивъ $q-1=\frac{1}{2}(p-1)$ будемъ $q=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}$ и $q+1=\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(2p+1)$. и формулу нашу раздѣливъ на $(p-1)^2$ получится $\frac{(p-1)^2}{2} + \frac{6pp(2p+1)^2}{2}$; помноживъ на 81 выдемъ $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9$, гдѣ какъ первой, такъ и послѣдній членъ квадраты: для того возми корень =

$20pr - 9p + 3$, котораго квадратъ есть $400p^2 - 360p^2 + 81pr + 120pr - 54p + 9$ и получимся $472p + 73 = -360p + 201$, слѣдов. $p = \frac{128}{768}$ и $q = \frac{9}{768} - \frac{1}{3}$.

Можно также вмѣсто прежняго корня положить $20pr + 9p - 3$, котораго квадратъ $400p^2 + 360p^2 - 120pr + 81pr - 54p + 9$ сравнивъ съ нашею формулоу дастъ $472p + 73 = 360p - 39$; слѣдов. $p = -1$: но сѣ знаменованіе ни малой пользы не приноситъ.

V. Можно также адблать, что формула наша на оба квадрата $(p+1)^2$, и $(p-1)^2$ раздѣлился. На сѣй конецъ возми $q = \frac{pt+1}{p+1}$, и будетъ $q+1 = \frac{pt+p+1+1}{p+1} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+1}$, и $q-1 = \frac{pt-p-t+1+1}{p+1} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+1}$; отсюда раздѣливъ нашу формулу на $(p+1)^2(p-1)^2$ выдѣстъ $\frac{(pt+1)}{(p+1)^2} + \frac{pt(t+1)^2(t-1)^2}{(p+1)^2}$, помноживъ на квад-

ратъ

ратъ $(p+t)^2$ будетъ еще квадратъ, а
имянно: $(pt+1)(p+t)^2+pp^2t+1)(t-1)^2$,
или $tt^2p^2+2t(tt+1)p^3+2ttpp+2t(tt+1)p$
 $+tt$, гдѣ какъ первой, такъ и по-

слѣдней членъ квадрата. Положивъ ко-
рень $=tt^2p+(tt+1)p-t$, котораго ква-
дратъ $tt^2p^2+2t^2tt+1)p^2-2ttpp-2t(tt+1)$
 $+ (tt+1)^2pp$

$p+tt$ и сравнивъ съ нашею формулою
будетъ $2tt^2p+(tt+1)p-t+2t^2(tt+1)$
 $=-2tt^2p-2t(tt+1)$, или $4tt^2p+$
 $(tt+1)^2p+4t(tt+1)=0$, или $(tt+1)^2p+$
 $4t(tt+1)=0$, т. е. $tt+1=-\frac{t}{p}$; откуда
 $p=-\frac{4t}{tt+1}$, $p^2+1=-\frac{3tt+1}{tt+1}$ и $p+t=\frac{t^2-3t}{tt+1}$,

слѣдов. $q=-\frac{3tt+1}{t^2-3t}$, гдѣ t по изволе-

нію взять можно. Пусть будетъ на-
прим. $t=2$, будетъ $p=-\frac{7}{5}$ и $q=-\frac{11}{5}$, от-

куда найдемъ $\frac{x}{z}=\frac{p}{q}=\frac{1}{\frac{19}{25}}$ и $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}$

$=-\frac{117}{44}$; слѣдов. $x=-\frac{117}{44}z$, а $y=-\frac{9}{44}z$. Возми

теперь $z=4.4.5.11$, выдетъ $x=3.13.11$

и $y=4.5.9.13$; почему прехъ искомымъ

квадратовъ корни $x=3.11.13=429$, $y=$

4.5.9.13=2340 и $z=4.4.5.11=880$, кои еще меньше прежде найденных.

$$\begin{aligned} \text{А отсюда } xx+yy &= 3^2 \cdot 13^2 (121+3600) = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^2 \\ xx+zz &= 11^2 (1521+6400) = 11^2 \cdot 89^2 \\ yy+zz &= 20^2 (13689+1936) = 20^2 \cdot 125^2 \end{aligned}$$

VI. На консуъ примѣчамъ мы при семъ вопросъ, что изъ каждаго рѣшенія еще другое нами можно: ибо когда сысканы сѣи знаменованія $x=a$, $y=b$ и $z=c$ такъ что $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$ и $bb+cc=\square$, то слѣдующія величины удовлетворяютъ $x=ab$, $y=bc$ и $z=ac$, откуда

$$\begin{aligned} xx+zz &= aabb+aac c = aa(bb+cc) = \square \\ xx+yy &= aabb+bbcc = bb(aa+cc) = \square \\ yy+zz &= aacc+bbcc = cc(aa+bb) = \square \end{aligned}$$

Но когда уже мы имали $x=a=3.11.13$; $y=b=4.5.9.13$ и $z=c=4.4.5.11$, то получимъ отсюда слѣдующія рѣшенія:

$$x=ab$$

$$x=ab=3.4.5.9 \text{ и } 1.13.13$$

$$y=bc=4.4.4.5 \text{ и } 5.9.11.13$$

$$z=ac=3.4.4.5.11.11.13$$

кои всѣ 3 могутъ раздѣлиться на 45.
11.133 и слѣдов. въ сѣи формулы со-
кращены будутъ $x=9.13$, $y=3.4.4.5$ и $z=$
 4.11 , то есть: $x=117$, $y=240$ и $z=44$,
кои еще меныше прежнихъ, и по сему

$$xx+yy=71289=(267)^2$$

$$xx+zz=15625=(125)^2$$

$$yy+zz=56536=(244)^2.$$

$$10+1.$$

Вопросъ. Требуется два числа x и y .
такъ что если одно придашь къ
квадрату другого, то выйдетъ ква-
дратъ, или сѣи двѣ формулы $xx+y$
и $yy+x$ должны быть квадратами?

Когда положимъ первую $xx+y=pp$,
и найдемъ отсюда $y=pp-xx$, то другая
формула $p^2-2ppxx+x^2+x=\square$, коей рѣ-

шеніе не легко усмотрѣть можно. Но положивъ для обѣихъ формулъ $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$ и $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, получимъ заразъ сіи два уравненія: I) $y+2px=pp$; II) $x+2qy=qq$, изъ которыхъ x и y найти не трудно, а именно: $x=\frac{2qpp-qq}{4pq-1}$ и $y=\frac{2ppp-pp}{4pq-1}$, гдѣ p и q по изволенію взять можно. Положи напр., $p=2$ и $q=3$, то получишь сіи два искомыя числа: $x=\frac{12}{13}$, и $y=\frac{32}{13}$ и тогда $xx+y=\frac{144}{169}+\frac{32}{13}=\frac{32}{13}\cdot\frac{36}{13}=(\frac{32}{13})^2$, а $yy+x=\frac{1024}{169}+\frac{12}{13}=\frac{1024}{169}+\frac{156}{169}=(\frac{32}{13})^2$. Возми по томъ $p=1$, $q=3$ и будетъ $x=\frac{5}{11}$, а $y=\frac{17}{11}$; понеже здѣсь одно число отрицательное, и сего бы рѣшенія можетъ быть принять не похотѣли, то положи $p=1$ и $q=\frac{1}{3}$, будетъ $x=\frac{5}{103}$, $y=\frac{7}{103}$ и получится $xx+y=\frac{25}{10609}+\frac{7}{103}=\frac{729}{10609}=(\frac{27}{101})^2$, а $yy+x=\frac{49}{10609}+\frac{5}{103}=\frac{64}{10609}=(\frac{8}{103})^2$.

1042.

Вопросъ. Найди два числа, коихъ бы сумма была квадратъ, а сумма бы ихъ квадратовъ биквадратъ?

Пусть

Пусть будутъ сіи числа x и y , и понеже $xx+yy$ долженъ быть биквадратъ, то адѣлай оной преядс квадратомъ; что учинится, ежели $x=pp-qq$, $y=2pq$, и будетъ $xy+yy=(pp+qq)^2$. А чинобы сіе было биквадратъ, то $pp+qq$ должно быть квадратомъ; чего ради возми $p=rr-ss$, $q=2rs$, и выдѣвъ $pp+qq=(rr+ss)^2$, откуда $xx+yy=(rr+ss)^2$, и слѣд. биквадратъ; но тогда будетъ $x=r^2-6rrss+s^2$, $y=4r^2s-4rs^2$, и осязаетъ только адѣлать квадратомъ сію формулу $x+y=r^2+4r^2s+rrss-4rs^2+s^2$, коей корень положи $rr+2rs+ss$; слѣдов. наша формула равна сему квадрату $r^2+4r^2s+6rrss+4rs^2+s^2$; гдѣ первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на rss дають $6r+4s=6r+4s$, или $12r+8s=0$; слѣд. $s=-\frac{3}{2}r$, или можно также взять корень $rr+2rs+ss$, дабы четвертые члены уничтожились; но понеже квадратъ сего корня есть $r^2-4r^2s+6rrss-4rs^2+s^2$, то оставшіеся члены раздѣливъ на rss дають $4r-6s=-4r+6s$, или $8r=12s$, слѣд. $r=\frac{3}{2}s$, и когда $r=3$, и $s=20$, то нашелся

бы

бы $x = -119$ отрицательной. Положимъ еще $r = \frac{1}{2}s + t$, то формула наша будетъ $rr = \frac{1}{2}ss + 3st + tt$; $r^2 = \frac{1}{4}s^2 + \frac{3}{2}sst + \frac{9}{4}stt + t^2$

$$\begin{aligned} r^4 &= \frac{1}{16}s^4 + \frac{3}{8}s^3t + \frac{27}{8}ssst + 6st^2 + t^4 \\ &+ 4r^2s = \frac{27}{8}s^4 + 27s^3t + 18ssst + 4st^2 \\ &- 6rrst = -\frac{27}{8}s^4 - 18s^3t - 6ssst \\ &- 4rs^2 = -6s^4 - 4s^3t \\ &+ s^4 = +s^4 \end{aligned}$$

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{3}{8}s^3t + \frac{51}{8}ssst + 10st^2 + t^4$, которая формула должна быть квадратъ, и слѣд. также кгда помножится на 16, т. е. $s^4 + 296s^3t + 408ssst + 160st^2 + 16t^4$, коея корень положи $= ss + 148st - 4tt$, котораго квадратъ есть $s^4 + 296s^3t + 21896ssst - 1184st^2 + 16t^4$. Здѣсь два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на ss дадимъ $21896s - 1184t = 408s + 160t$, слѣдов. $\frac{s}{t} = \frac{1184t + 408s}{21896s - 1184t} = \frac{5}{137}$. Взявъ $s = 84$ и $t = 1343$ будетъ $r = 1469$; а изъ сихъ чиселъ $r = 1469$ и $s = 84$ найдемъ $x = r^2 - 6rrs - s^2 = 4565486027761$ и $y = 1061602293520$.

ГЛАВА XV.

О разрѣшеніи вопросовъ, въ которыхъ
требуется кубы.

1043.

Въ прежней главѣ были такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы должно было дѣлать квадратами и гдѣ мы довольно имѣли случай изъяснить разные приемы, помощью коихъ данныя правила въ дѣйствіе произвести можно. Теперь осталась еще разсмотрѣть такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы надлежитъ дѣлать кубами, къ чему показаны уже въ прежней главѣ правила, кои чрезъ рѣшенія нижеслѣдующихъ вопросовъ болѣе изъясненіе получаютъ.

1044.

Вопросъ. Найти два куба x^3 и y^3 , которыхъ бы сумма была также кубъ?

Когда

Когда $x^3 + y^3$ надлежитъ быть кубомъ, то формула сія раздѣленная на кубъ y^3 должна также кубомъ остаться, т. е. $\frac{x^3}{y^3} + 1$. Положивъ $\frac{x}{y} = z - 1$ получимъ $z^3 - 3zz + 3z$; что долженствовало быть кубомъ. По прежнимъ правиламъ можно взять кубичной корень $= z - 1$, коего кубъ есть $z^3 - 3z^2z + 3z - 1$ и опредѣлимъ z такъ чтобы вторые члены уничтожились; тогда было бы $z = 1$, а остальные члены дали бы $3z = 3z^2z - 1 = 3z - 1$, откуда найдемъ z бесконечной; но сіе знаменованіе намъ ни мало не служитъ. Оставивъ z неопредѣленнымъ получится сіе уравненіе $-3z^2z + 3z = -3z^2z + 3z^2z - 1$; и изъ сего квадратнаго уравненія опредѣлится величина числа z , а именно: $3z^2z - 3z = 3z^2z - 3z - 1 = 3(z - 1)$
 $zz = 3(zz - 1)z - 1$, или $zz = (z + 1)z - \frac{1}{3(z - 1)}$,
 слѣдов. $z = \frac{z + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(zz + 2z + 1) - \frac{1}{3(z - 1)}}{4}}$
 $\frac{z + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\frac{1}{3} + 3zz - 3z - 3)}{12(z - 1)}}$. И такъ

все дѣло въ томъ состоятъ, чтобъ сию дробь дѣлать квадратомъ: сего ради помножимъ дробь вверху и внизу на $3(u-1)$ дабы знаменатель вышелъ квадратъ, а

именно
$$\frac{-3u^3 + 12u^2 - 18uu + 9}{36(u-1)^2},$$
 коей дроби

числитель долженъ быть квадратъ, гдѣ послѣдней членъ уже квадратъ. Возьми теперь по прежнимъ правиламъ корень $= 3 + fu + gu$, или $gu + fu + 3$, котораго квадратъ есть $ggu^2 + 2fgu^2 + 6gu + ffu + 2fu + 9$ и здѣлай чтобъ 3 послѣдніе члены уничтожились, то произойдетъ во первыхъ $0 = 2f$, т. е. $f = 0$, а по томъ $6g + ff = -18$, по чему $g = 3$; первые же два члена раздѣливъ на u^2 дадутъ $-3u + 12 = ggu + 2fg = ggu$, слѣдов. $u = 1$, которое знаменованіе ни къ чему насъ не приведетъ. Положивъ $u = 1 + t$, формула наша будетъ $-12t - 3t^2$, которая должна быть квадратъ, чему статься не лзя, ежели t не будетъ отрицательнымъ; и такъ пусть $t = -s$, формула наша выдетъ $12s - 3s^2$, которая, когда $s = 1$ будетъ квадратъ, но тогда бы нашлось $t = -1$

и $x=0$, откуда ничего найти не лзя. Но какъ бы мы за сѣ дѣло ни принимались, то никогда не найдемъ такого знаменованія, которое бы насъ привело къ нацсму намѣренію, и отсюда заподлинно заключить можно, что не лзя найти двухъ кубовъ, которыхъ бы сумма была кубъ. Сѣ можно доказать слѣдующимъ образомъ.

1045.

Теорема. Не возможно найти двухъ кубовъ, коихъ бы сумма, или разность была кубъ. Зѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что если сумма не возможна, то и разность также не возможна быть должна. Ибо когда не лзя чтобъ $x^3+y^3=z^3$, то не возможно также, чтобъ и $z^3-y^3=x^3$, а z^3-y^3 есть разность двухъ кубовъ. И такъ довольно показать невозможность изъ одной только суммы, или изъ одной разности, по тому что одна изъ другой слѣдуетъ. Сѣе же доказательство состоятъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

I.

I. Здѣсь можно принять, что числа x и y между собою недѣлимы: ибо ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы ихъ кубы на кубъ онаго могли раздѣлиться: такъ напримѣръ, когда $x = 2a$ и $y = 2b$, то бы $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$ и еспли бы сія сумма была кубъ, то надлежало бы также и $a^3 + b^3$ быть кубомъ.

II. Когда же x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, то оба сіи числа или нечетныя, или одно четное, а другое нечетъ. Въ первомъ случаѣ должно бы быть z четное, въ другомъ же случаѣ нечетъ. И такъ изъ 3 хъ чиселъ x , y и z два всегда нечетныя, а одно четное: чего ради возмемъ къ нашему доказательству оба нечетныя; ибо все равно покажемъ ли невозможность суммы, или разности, потому что сумма переменяется въ разность, когда корень будетъ отрицательнымъ.

III. По сему пусть будутъ x и y не-
 численные числа, но какъ сумма, такъ
 и разность ихъ будетъ численная. Для
 того положи $\frac{x+y}{2}=p$, $\frac{x-y}{2}=q$ и будетъ
 $x=p+q$ и $y=p-q$; откуда явствуется,
 что изъ двухъ чиселъ p и q одно че-
 тное, а другое нечетное быть должен-
 ствуетъ. Чего ради $x^3+y^3=2p^3+6pq^2$
 $=2p(pp+3qq)$: и такъ надлежишь до-
 казать, что произведение $2p(pp+3qq)$
 кубомъ быть не можетъ. Если бы
 съ разности доказывать захотѣли, то
 было бы $x^3-y^3=6p^2q+2q^3=2q(qq+3pp)$,
 которая формула съ прежнею весьма
 сходствуется: ибо переставлены толь-
 ко буквы p и q , по чему довольно по-
 казать невозможность формулы $2p$
 $(pp+3qq)$, понеже отсюда несомнѣн-
 но слѣдуетъ, что ни сумма, ни ра-
 зность двухъ кубовъ кубомъ быть не
 можетъ.

IV. Если бы $2p(pp+3qq)$ было кубъ, то
 былъ бы онъ четной, и слѣд. на 8
 дѣлимой; по чему осьмая часть нашей
 фор-

формулы была бы цѣлое число, да припомѣ и кубическое; а именно $\frac{1}{2}p(pp+3qq)$; но понеже изъ чиселъ p и q одно четное, а другое нечетное, то $pp+3qq$ будетъ нечетное и на 4 раздѣлиться не можетъ, откуда слѣдуетъ, что p на 4 дѣлимо, и слѣдов. будетъ цѣлое число.

V. Понеже произведение $\frac{1}{2}(pp+3qq)$ должно быть кубомъ, то каждой множитель поровню $\frac{p}{2}$ и $pp+3qq$ долженъ вують быть кубы; а навпаче когда они общаго дѣлителя не имѣютъ. Ибо ежели произведение изъ двухъ недѣлимыхъ между собою множителей должно быть кубомъ, то каждой самъ по себѣ долженъ быть кубомъ; когда же они общаго дѣлителя имѣютъ, то оной надлежитъ рассмотреть особливо; и такъ здѣсь вопросъ, могутъ ли имѣть множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя; что разыскать должно. Ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы и самъ pp и $pp-3qq$ того же дѣлителя имѣли, и слѣдов.

сихъ послѣднихъ разность $3q^2$ съ pr того же бы самаго дѣлился имѣли; но p и q между собою недѣлимы, то и числа pr и $3q^2$ инаго общаго дѣлителя кромѣ 3 хъ не имѣютъ; что дѣлится когда p на 3 дѣлится.

VI. Сего ради надлежитъ намъ разсмотрѣть два случая: первой когда множители p и $pr+3q^2$ общаго дѣлителя не имѣютъ, что случается, когда p на 3 раздѣлиться не можетъ; а другой случай ежели они общаго дѣлителя имѣютъ, что бываетъ когда p на 3 дѣлимо. Сии два случая съ осторожностію различать надлежитъ потому что для каждаго особое доказательство дать должно.

VII. *Первой случай.* Пусть оудетъ p на 3 недѣлимо, и слѣд. наши оба множители p и $pr+3q^2$ между собою недѣлимы, то каждой самъ собою долженъ быть кубъ; и по сему здѣлаетъ $pr+3q^2$ кубомъ, что учинится, ежели,
какъ

какъ выше показано ; $p+qV-3=(t+uV-3)^2$, а $p-qV-3=(t-uV-3)^2$, и было бы $pp+3qq=(tt+3uu)^2$, слѣд. кубъ ; но отсюда $p=t^2-9uu$ и $q=3tt-3u^2=3u(tt-uu)$. Понеже q есть нечетное число , то и должно быть также нечетъ , а t четъ : потому что иначе бы $tt-uu$ было бы четное число.

VIII. Понеже $pp+3qq$ кубомъ дѣлано и найдено $p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, то надлежало бы также и q быть кубомъ , слѣдов. и $2p$; по чему сия формула $2t(t+3u)(t-3u)$ должна быть кубъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ во первыхъ , что t четное число и на 3 не дѣлимо : ибо въ противномъ случаѣ было бы и p также на 3 дѣлимо , коимъ случай именно отсюда исключается ; слѣдов. сии 3 множителя $2t$, $t+3u$ и $t-3u$ между собою не дѣлимы и для того каждой долженъ быть кубъ.

И такъ положивъ $t+3u=f^3$, $t-3u=g^3$ будеть $2t=f^3+g^3$; но теперь $2t$ естъ также

Аа 3

также кубъ, и слѣдов. были бы здѣсь два куба f^2 и g^2 , которыхъ бы сумма дѣлала кубъ, и кои были бы несравненно менше съ начала взятыхъ кубовъ x^3 и y^3 : ибо когда положили мы $x = p + q$ и $y = p - q$, а теперь p и q опредѣлили буквами i и u , то числа p и q должны быть гораздо больше нежели i и u .

IX. По чему когда два такіе куба въ большихъ числахъ находясь, то можно бы было оныя также изъяснить въ гораздо меньшихъ числахъ, которыхъ бы сумма была также кубъ; и такимъ бы образомъ можно было перейти къ меньшимъ такимъ кубамъ: но въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ заподлинно нѣтъ, по и въ большихъ числахъ оныя невозможны. Сіе доказательство подкрѣпляется и тѣмъ, что другой случай ведетъ насъ къ тому же, какъ мы поспѣшь увидимъ.

X. Другой случай. Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ; положивъ $p = 3r$
бу-

будетъ формула наша $\frac{r}{4}(9rr+3qq)$, или $\frac{r}{4}(3rr+qq)$, которые оба множители между собою не дѣлимы; потому что $3rr+qq$ ни на 2, ни на 3 не дѣлился: ибо r равнымъ образомъ четное число: быть должно такъ какъ и p : чего ради каждой изъ сихъ двухъ множителей самъ по себѣ долженъ быть кубъ.

XI. Если мы другаго множителя $3rr+qq$ или, $qq+3rr$ здаемъ кубомъ, то найдемъ, какъ и прежде $q=1(11-9u)$ и $r=3u(11-11u)$, гдѣ надлежитъ примѣчать, что когда q было нечетъ, то здѣсь и 1 также нечетъ, а u четное число быть надлежитъ.

XII. Понеже $\frac{r}{4}$ также должно быть кубъ, и слѣдов. помноживъ на кубъ $\frac{r}{4}$ также, то $\frac{r}{4}$ п. с. $2u(11-11u)=2u(1+u)(1-u)$ надлежитъ быть кубъ, которые 3 множителя между собою не дѣлимы и слѣдов. каждой по себѣ долженъ быть кубъ. Но когда возьмется $1+u=f^3$ и

$z - u = g^2$, то слѣдуетъ отсюда $2u = f^2 - g^2$, что также надлежало бы быть кубомъ, по тому что $2u$ есть кубъ. Такимъ бы образомъ можно найти два гораздо меншия куба f^2 и g^2 , которыхъ разность была бы кубъ, и слѣдов. также такіе, которыхъ сумма дѣлаетъ кубъ: ибо надлежитъ только подобрать $f^2 - g^2 = h^2$, то будетъ $f^2 = h^2 + g^2$; и такъ имѣли бы мы два куба, которыхъ сумма также кубъ. Симъ прежне доказательство совершенно подтверждается, что когда въ самыхъ большихъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, которыхъ сумма или разность была бы кубъ, и сіе для того что въ самыхъ меншихъ числахъ такихъ не находится.

1046.

Когда невозможно найти такихъ двухъ кубовъ, коихъ бы сумма или разность была кубъ, то прежней нашъ вопросъ

просъ уничтожается ; обыкновенно же начинающъ съ сего вопроса : какимъ образомъ найти три куба , которыхъ бы сумма дѣлала кубъ ? Изъ оныхъ два можно взять по изволенію , такъ что третьей только сыскать надлежитъ , которой вопросъ теперь мы рассмотримъ.

1047.

Вопросъ. Къ даннымъ двумъ кубамъ a^3 и b^3 найди еще третей , которой бы съ прежними вмѣстѣ составилъ кубъ ?

По сему формула $a^3 + b^3 + x^3$ должна быть кубъ , чего иначе учинить нельзя , какъ только что имѣть известной случай. Сей случай самъ попадаетъ , а именно когда $x = -a$, положивъ $x = y - a$ будешь $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$ и формула наша должна быть кубъ $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$, въ которомъ первой и послѣдней членъ кубы , то заразъ два рѣшенія найти можно.

I. По первому возми корень $=y+b$, ко-
его кубъ есть $y^3+3byy+3bby+b^3$ и
получится $-3ay+3aa=3by+3bb$, от-
куда $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$, слѣдов. $x=b$,
что намъ ни мало не служивъ.

II. Можно также положить корень $=b$
 $+fy$, котораго кубъ есть $fy^3+3bffy$
 $+3bbfy+b^3$; опредѣли f такъ, чтобы
третіе члены уничтожились. Сіе задѣ-
ляется когда $3aa=3bbf$, или $f=\frac{aa}{bb}$,
первые же два члена раздѣливъ на yy
дають $y-3a=fy+3bff=\frac{a^3y}{b^3}+\frac{3a^3}{b^3}$; по-
множивъ на b^3 получится $a^3y+3a^3b^3$,
откуда найдется $y=\frac{3a^3b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=$

$$\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3}; \text{ а отсюда } x=y-a=$$

$$\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}.$$

И такъ

И такъ изъ данныхъ обоихъ кубовъ a^3 и b^3 найдется корень претяго искомаго куба ; а чпо бы оной былъ положительной , то надлежитъ только b^3 взять за самой большой кубъ , что мы изъяснимъ нѣкоторыми примѣрами.

I. Пусть будутъ данные два куба 1 и 8, такъ что $a=1$ и $b=2$, то формула $9+x^3$ будетъ кубъ , когда $x=\frac{17}{7}$: ибо тогда выйдетъ $9+x^3=\frac{2000}{343}=(\frac{20}{7})^3$.

II. Положимъ данные два куба 8 и 27 , такъ, что $a=2$ и $b=3$, то формула $35+x^3$ будетъ кубомъ , когда $x=\frac{124}{10}$.

III. Пусть будутъ два данные куба 27 и 64 , такъ что $a=3$ и $b=4$, то выйдетъ ся формула $91+x^3$ кубомъ , когда $x=\frac{465}{137}$.

Еслили бы къ даннымъ двумъ кубамъ похотѣлъ еще больше такихъ претяихъ искать , то должно бы въ первой формулѣ $a^3+b^3+x^3$ положить еще $x=2ab$

$\frac{2ab^2 + a^3}{b^3 - a^3} + x$, и иногда бы пришли мы къ подобной формулѣ, изъ которой новыя знаменованія вмѣсто x опредѣлить можно бы было; но сіе бы завело насъ въ превеликіе выкладки.

1048.

При семъ вопросѣ попадется удивительный случай, когда оба данныя куба равны между собою, или $b=a$: ибо тогда найдемъ $x = \frac{3a^4}{0}$, т. е. безконечной, и слѣдов. не получимъ никакого рѣшенія, чего ради сего вопроса, когда $2a^3 + x^3$ должно быть кубомъ, разрѣшить не можно. Пусть напри. $a=1$, и слѣдов. формула наша $2+x^3$, то надлежитъ примѣчать, что какіе бы перемѣны предпріяты ни были, то все стараніе тщетно и нркогда опшуда надлежашаго знаменованія для x найти не можно; по чему съ достовѣрностію заключаемъ, что къ удвоенному кубу никакого куба сыскать

не

не лзя , которой бы съ онымъ вмѣстѣ
составилъ паки кубъ , или съ уравненіе
 $2a^3 + x^3 = y^3$ невозможно. Отсюда слѣ-
дуетъ $2a^3 = y^3 - x^3$. слѣдов. также не воз-
можно найти двухъ кубовъ , которыхъ бы
разность была удвоенной кубъ , что та-
коже и о суммѣ двухъ кубовъ раз. вѣтъ
должно и слѣдующимъ образомъ доказано
быть можетъ.

1049.

Формула. Ни сумма, ни разность двухъ
кубовъ удвоенному кубу никогда равна
быть не можетъ , или сія формула
 $x^3 + y^3 = 2z^3$ сама по себѣ невозможна,
выключая $y=x$, которой случай чрезъ
себя виденъ.

Здѣсь можно опять x и y взять за
недѣлимые между собою числа : ибо
если бы они общаго дѣлителя имѣли ,
то бы и z также на онаго могъ раздѣ-
литься , и слѣдов. цѣлое уравненіе на
кубъ бы онаго раздѣлялось. Понже $x^3 + y^3$
должно быть четное число , то обоимъ
числамъ x и y надлежитъ быть нечет-
нымъ

нымъ; по чему какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ чепная. И такъ положивъ $\frac{x+y}{2}=p$, а $\frac{x-y}{2}=q$, будетъ $x=p+q$, а $y=p-q$, и тогда изъ чиселъ p и q одно должно быть чепное, а другое нечепъ. Отсюда $x^3+y^3=2p^3+6pq^2=2p(pp+3qq)$ и $x^3-y^3=6p^2q+2q^3=2q(3p^2+qq)$, которыя обѣ формулы во всемъ мжду собою сходны: и такъ довольно будетъ показывать, что формула $2p(pp+3qq)$ удвоеннымъ кубомъ, каковъ $2z^3$, не будетъ, и слѣдов. сія $p(pp+3qq)$ кубъ быть не можетъ; чему доказательство въ слѣдующихъ положеніяхъ содержится.

I. Здѣсь опять два случая разсматривать можно, изъ коихъ первой, когда два множителя p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ, и тогда каждой самъ долженъ быть кубъ. Другой же случай, когда они общаго дѣлителя имѣютъ, которой какъ уже мы прежде видѣли, не другой какой, какъ 3, быть можетъ.

II. Первой случай. Пусть будетъ p на 3 не дѣлимо, и слѣдов. оба множители между собою не дѣлимы, по здѣлай сперва $pp + 3qq$ кубомъ, что учинится, когда $p = t(tt - 9u)$ а $q = 3u(tt - u)$, и тогда знаменованіе числа p долженствуетъ быть также кубъ; но t на 3 не дѣлимо, по тому что иначе бы p на 3 дѣлилось, по два множителя t и $tt - 9u$ между собою не дѣлимы, и слѣдовательно каждой самъ долженъ быть кубъ.

III. Но послѣдней самъ состоитъ еще изъ двухъ множителей, а именно $t + 3u$ и $t - 3u$, кои между собою не дѣлимы. Понеже сперва t на 3 дѣлится не можетъ, а потомъ одно изъ чиселъ t и u четное, а другое нечетъ. Если бы оба были нечетныя, то не только бы p , но и q было четное, чему спастись нельзя, слѣдов. каждой изъ сихъ множителей $t + 3u$ и $t - 3u$ долженъ быть кубъ.

IV.

IV. И по сему возьми $t+3u=f^2$, а $t-3u=g^2$, и будетъ $2t=f^2+g^2$, но t само по себѣ есть кубъ, которой пусть $=b^3$: и такъ имѣли бы мы $f^2+g^2=2b^3$; и с. нашли бы мы два гораздо меншіе куба, а именно f^2 и g^2 , которыхъ бы сумма была удвоенной кубъ.

V. Другой случай. Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ, то положивъ $p=3r$ формула наша будетъ $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы, и по сему каждой кубомъ бытъ долженствуетъ.

VI. А что бы послѣдней кубомъ здѣлать, то возьми $q=i(ii-9uu)$, а $r=3u(ii-uu)$, и тогда изъ чиселъ i и u одно четное, а другое нечетъ быть должно; ибо въ противномъ случаѣ оба числа q и r были бы четныя; отсюда найдется первой множитель $9r=27u(ii-uu)$, которой также кубомъ бытъ долженъ, и слѣдов. раздѣленъ

дѣленной на 27 также , т. с.
 $u(11-111)=u(t+u)(t-u)$.

VII. Понеже сіи 3 множителя также между собою недѣлимы , то каждой по себѣ кубъ быть долженъ : для того положи оба послѣдніе $t+u=f^3$, а $t-u=g^3$ и получимся $2u=f^3-g^3$; когда теперь u должно также кубомъ быть , то получимъ мы 2 куба въ гораздо меньшихъ числахъ f^3 и g^3 , которыхъ разность подобнымъ образомъ была бы удвоенной кубъ.

VIII. Когда въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, коихъ бы сумма, или разность была удвоенной кубъ , то явствуетъ , что и въ большихъ числахъ оныхъ не будетъ.

IX. Можно бы было сказать , что въ малыхъ числахъ такой случай есть, а именно , когда $f=g$, и такъ бы прежнее доказательство насъ сбивать могло. Но когда $f=g$, то въ первомъ бы случаѣ было $t+3u=t-3u$, слѣдов. $u=0$: и такъ q было бы

Толѣ II.

бы также $\equiv 0$. А мы положили $x \equiv r$
 $\equiv +q$ и $y \equiv p+q$, то бы первые два
 куба x^3 и y^3 были также между
 собою равны, которой случай ямян-
 но исключается. Равнымъ образомъ
 и въ другомъ случаѣ, когда $f \equiv g$,
 надлежало бы бытъ $i \equiv +i \equiv -i$, и слѣд.
 опять $u \equiv 0$, по чему также $r \equiv 0$ и
 $p \equiv 0$, и первые бы кубы x^3 и y^3 были
 пакы равны, о которомъ случаѣ
 вѣдь въ вопроса нѣтъ.

1050.

Вопросъ. Найдти вообще 3 куба x^3, y^3 и
 z^3 , коихъ бы сумма составила кубъ?

Мы уже видѣли, что ежели два
 изъ сихъ кубовъ возмуться за извѣстные,
 то опшуда завсегда трепней опредѣлить
 можно, еспли только два первые между
 собою не равны. Но по прежнему способу
 въ каждомъ случаѣ находится одно толь-
 ко знаменованіе для третьяго куба и
 весьма бы было трудно находить опшуда
 больше такихъ кубовъ.

Здѣсь

Здѣсь беремъ мы всѣ 3 куба за неизвѣстные; а чтобы показать общее рѣшеніе, то положимъ $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, вычитая z^3 съ обѣихъ сторонъ получимся $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$, которое уравненіе удовлетворяетъ слѣдующимъ образомъ.

I. Возьми $x = p + q$, $y = p - q$ и будетъ, какъ уже мы видѣли, $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$; по томъ положи $v = r + s$, $z = r - s$, и найдемся $v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr)$, слѣдоват. должно быть $2p(pp + 3qq) = 2s(ss + 3rr)$, или $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$.

II. Прежде уже видѣли, что $pp + 3qq$ никакихъ другихъ множителей не имѣетъ, кромѣ содержащихся въ самой сей формулѣ. Понже обѣ сти формулы $pp + 3qq$ и $ss + 3rr$ неоптѣнно общаго дѣлителя имѣть должны, то пусть будетъ оной $= tt + 3uu$.

III. На сей конецъ положи $pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$ и $ss + 3rr = (bb + 3kk)(tt + 3uu)$, выдетъ $p = fi + 3gu$, $q = gi - fu$ и будетъ

$$pp = ffit + 6fgtu + 9ggui, \quad qq = gggt - 2fgtu + ffit, \quad \text{слѣдов.} \quad pp + 3qq = (ff + 3gg)tt + (3ff + 9gg)ui = (ff + 3gg)(tt + 3ui).$$

IV. Равнымъ образомъ изъ другой формулы получимъ $s = bt + 3ku$ и $r = kt - bu$; и отсюда $ss = bhtt + 6bktu + 9kkui$, $3rr = 3kktt - 6kkui + 9bbui$ и такъ $ss + 3rr = bb(tt + 3ui) + 3kk(tt + 3ui) = (bb + 3kk)(tt + 3ui)$. Но $s(ss + 3rr) = p(pp + 3qq)$, а отсюда выхдитъ сіе уравненіе $(ft + 3gu)(ff + 3gg)(tt + 3ui) = (bt + 3ku)(bb + 3kk)(tt + 3ui)$, которое раздѣливъ на $tt + 3ui$ будетъ

$$ft(ff + 3gg) + 3gu(ff + 3gg) = bt(bb + 3kk) + 3ku(bb + 3kk), \quad \text{или} \quad ft(ff + 3gg) - bt(bb + 3kk) = 3ku(bb + 3kk) - 3gu(ff + 3gg), \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{k(bb + 3kk) - 3g(ff + 3gg)}{f(ff + 3gg) - b(bb + 3kk)} \quad \text{и.}$$

V. Для сысканія цѣлыхъ чиселъ, возмъ и $f(ff + 3gg) - b(bb + 3kk)$, и будетъ $t = 3k(bb + 3kk) - 3g(ff + 3gg)$, гдѣ 4 буквы f , g , b и k по изволенію взять можно.

VI. Нашедъ изъ сихъ четырехъ чиселъ
 знаменованія для t и u получится :
 I) $p = ft + 3gu$; II) $q = gt - fu$; III) $s = ht + 3ku$; IV) $r = kt - hu$ и наконецъ для раз-
 рѣшенія нашего вопроса $x = p + q$, $y = p - q$,
 $z = r - s$ и $v = r + s$, которое рѣшеніе есть
 общее , и что всѣ возможные случаи
 въ немъ содержащіяся : потому что во
 всемъ вычисленіи никакихъ произволь-
 ныхъ ограничиваній не дѣлано. Все
 искусство состоятъ въ томъ, чтобы
 уравненіе наше на $tt + 3uu$ могло раздѣ-
 литься, чрезъ что буквы t и u опредѣ-
 лены будутъ , простымъ уравненіемъ.
 Употребленіе сего формулы представ-
 лено быть можетъ безконечно мно-
 гими способами, чему мы предложимъ
 нѣкоторые примѣры.

I. Пусть будетъ $k = 0$, $h = 1$, найдемся
 $t = -3g(ff + 3gg)$ и $u = f(ff + 3gg) + 1$; откуда
 $p = -3fg(ff - 3gg) + 3fg(ff + 3gg) - 3g = -3g$; $q =$
 $-(ff + 3gg)^2 + f$, по томъ $s = -3g(ff + 3gg)$
 и $r = -f(ff + 3gg) + 1$, а отсюда на-
 конецъ получится $x = -3g - (ff + 3gg)^2 + f$,
66 3 у

$y = -3g + (ff + 3gg)^2 - f$, $z = (3g - f)(ff + 3gg) + 1$
и наконец $v = -(3g + f)(ff + 3gg) + 1$.

Положивъ теперь $f = -1$ и $g = +1$ получится $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ и $v = -7$; по чему имѣемъ мы слѣдующее уравненіе $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$, или $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Пусть будемъ $f = 2$, $g = 1$, слѣдов. $ff + 3gg = 7$; по томъ $b = 0$, $k = 1$, по чему $bb + 3kk = 3$, будемъ $t = -12$, $u = 14$; откуда $p = 2t + 3u = 18$; $q = t - 2u = -40$; $r = t = -12$ и $s = 3u = 42$; слѣдов. получимъ $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$; $z = r - s = -54$ и $v = r + s = 30$, такъ что $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, или $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$; но понеже всѣ корни на 2 могутъ раздѣлиться, по будемъ также $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$.

III. Возмемъ $f = 3$, $g = 1$, $b = 1$, $k = 1$ такъ что $ff + 3gg = 12$, $bb + 3kk = 4$ найдемъ $t = -24$ и $u = 32$, которые на 8 могутъ раздѣлиться. А понеже здѣсь дѣло состоитъ въ ихъ содержаніи, по положимъ $t = -3$, и $u = 4$, откуда $p = 3t + 3u = +3$;

а $q=1-3u=15$, $r=1-u=7$ и $s=1+3u=10$; слѣдов. $x=-12$, $y=18$, $z=-16$ и $w=2$, такъ что $-12^3+18^3-16^3=2^3$ или $18^3=16^3+12^3+2^3$, или раздѣливъ на 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV. Возмемъ $g=0$, $k=b$, такъ что f и b опредѣлены не будутъ, то получимъ $ff+3gg=ff$ и $bb+3kk=4b^3$, откуда $t=12b^2$ и $u=f^2-4b^2$; потомъ $p-ft=12fb^2$, $q=-f^2+4fb^2$, $r=-12b^2-bf^2+4b=16b^2-bf^2$ и $s=3bf^2$; слѣдов. $x=f+q=16fb^2-f^2$; $y=p-q=8fb^2+f^2$, $z=r-s=16b^2-4bf^2$ и $w=r+s=16b^2+2bf^2$. Положимъ теперь $f=b=1$ найдется $x=15$, $y=9$, $z=12$ и $w=18$, а раздѣливъ на 3 получится $x=5$, $y=3$, $z=4$ и $w=6$ такъ что $3^3+4^3+5^3=6^3$. При семъ примѣчанія достойно, что сии три корня 3, 4, 5, единицею возрастающъ; чего ради рассмотримъ, нѣтъ ли еще больше такихъ чиселъ.

1051.

Вопросъ. Требуется 3 числа въ арифметической прогрессии, когдѣ разность $=1$, чтобы кубы оныхъ чиселъ составили вмѣстѣ кубъ? б б 4 Пусть

Пусть будетъ x среднес изъ сихъ чиселъ, то меньшее $= x-1$, а большее $x+1$; оныхъ кубы сложивъ вмѣстѣ даютъ $3x^2 + 6x = 3x(xx+2)$, что долженствуетъ быть кубомъ. Къ сему попрежнему знать одинъ случай, въ которомъ сѣ бываетъ, и по нѣкоторымъ пробамъ найдемся $x=4$; чего ради по прежнимъ правиламъ положимъ $x=4+y$, и будетъ $xx=16+8y+yy$, $x^2=64+48y+12yy+y^2$, слѣдов. формула наша будетъ $216+150y+36yy+3y^2$, гдѣ первой членъ кубъ, а послѣдней нѣтъ. Сего ради возми корень $= 6+fy$ и здѣлай чтобъ первые оба члена уничтожились. Понесе кубъ онаго корня есть $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, то должно быть $150=108f$, и слѣдов. $f=\frac{25}{18}$; остальные же члены раздѣливъ на yy даютъ $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^3}y$, или $18^3 \cdot 36+18^3 \cdot 3y=18^3 \cdot 25^2+25^3y$, или $18^3 \cdot 36-18^3 \cdot 25^2=25^3y-3y \cdot 18^3$; почему $y=\frac{18^3 \cdot 36-18^3 \cdot 25^2}{25^3-3 \cdot 18^3}=\frac{18 \cdot 18 \cdot 36-25^2}{25^2-3 \cdot 18^2}$; $y=-\frac{214-27}{25^2}=-\frac{762}{25^2}$, слѣдов. $x=\frac{22}{25^2}$.

Трудно

Трудно бы показалось сіе обращеніе въ кубы продолжать далѣе; но надлежитъ примѣчать, что вопросъ можно завсегда привести къ квадратамъ. Понеже $3x$ ($xx+2$) должно быть кубомъ, то положи оной $=x^3y^3$ и получимся $3xx+6=x^3y^3$, слѣдов. $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Когда числитель сей дроби уже квадратъ, то нужно только знаменателя $6y^3-18$ раздѣлать квадратомъ; къ сему потребно также знать одинъ случай, и понеже 18 на 9 дѣлится, а 6 только на 3, то y долженъ также на 3 дѣлиться: сего ради положи $y=3z$ и будетъ нашъ знаменатель $=162z^3-18$, которой раздѣливъ на 9 будетъ $18z^3-2$ и которой квадратомъ быть долженствовуетъ. Сіе раздѣлится когда $z=1$. Для сей причины возьми $z=1+v$, то должно быть $16+54v+54v^2+18v^3=\square$; положи ислеръ корень $=4+\frac{27}{4}v$, котораго квадратъ есть $16+54v+\frac{729}{16}v^2$; почему $54+18v=\frac{729}{16}$; или $18v=-\frac{181}{16}$, слѣдов; $2v=-\frac{15}{16}$ и $v=-\frac{15}{32}$; откуда найдется $z=1+v=\frac{27}{32}$, по томъ $y=\frac{81}{32}$.

Разсмотримъ теперь прежняго знаменателя, который былъ $бу^3 - 18 - 162z - 18 = 9(18z^3 - 2)$, но сего множителю $18z^3 - 2$ клали мы квадратной корень $= \frac{107}{148}$; слѣд. квадратной корень въ всего знаменателя есть $\frac{321}{148}$; а изъ числителя оной есть 6, откуда $x = \frac{6}{\frac{321}{148} - \frac{256}{107}}$, которое знаменование отъ прежняго совсемъ различно, и по сему корни нашихъ прехъ кубовъ будутъ слѣдующіе: I) $x - 1 = \frac{149}{107}$; II) $x = \frac{256}{107}$, III) $y + 1 = \frac{363}{107}$, коихъ кубы сложенные въ одну сумму производятъ кубъ, котораго корень будетъ $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{107} = \frac{408}{107}$.

1052.

Симъ намѣрены мы заключить сію часть неопредѣленной Аналитики: ибо изъ приложенныхъ вопросовъ имѣли уже мы случай изъяснить значнѣйшіе прѣмы употребительнѣйшіе по сіе мѣсто въ сей наукѣ.









20

